مقدمة في

المعادلات التفاضلية

الدكتور سالم بن أحمد سحاب



مركز النشر العلمي
جامعة الملك عبد العزيز
جـــدة

اهداءات ١٩٩٤
المملكة العربية
السعودية


بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة في المعادلات التفاضلية



مركز النشر العلمي
جامعة الملك عبد العزيز
ص ب ١٥٤٠ - جدة ٢١٤٤١
المملكة العربية السعودية

الطبعة الأولى : ١٤١٣هـ (١٩٩٢م)

جامعة الملك عبدالعزيز – عمادة شؤون المكتبات
بيان الفهرسة أثناء النشر

سحاب ، سالم بن أحمد .
مقدمة فى المعادلات التفاضلية / سالم بن سحاب – جدة :
جامعة الملك عبدالعزيز ، مركز النشر العلمي ، ١٤١٢هـ .
أ – ن ، ٣٣٤ ص ، ١٧ × ٢٤ سم
يشتمل على : مراجع منتقاة – ثبت بالمصطلحات العلمية .
١ . المعادلات التفاضلية .أ . العنـوان .
ب . جامعة الملك عبدالعزيز ، مركز النشر العلمي . ٥١٥٫٣٥

الإهـــداء

إلى زوجتي ورفيقة دربـــي ...

إلىَ التي أعطت وتعطي بلا حدود ...

أسأل الله الكريم لها ولي الرضوان والجنة ...

وأسأله لنا الذرية الصالحة والخاتمة الحسنة ...

تقديم

الحمد لله وكفى ، وسلام على عباده الذين اصطفى ، أما بعد :

فلا يكاد يخفى على رجال التربية والتعليم مدى الحاجة الماسة الى بناء مكتبة عربية زاخرة بالعلم والمعرفة في شتى التخصصات والمجالات .

وهذا الكتاب خطوة على الطريق الطويل ، أرجو من الله العلي الكبير أن يبارك فيها كما بارك في كثير ممن سبقوها .

وتعد المعادلات التفاضلية العادية من المواد الأساسية التي يرتكز عليها نمو الطالب العلمي في المجالات الرياضية والتطبيقية والهندسية . فهي تربط بين تجريد النظريات وواقع التطبيقات بأسلوب علمي عملي سلس .

ولما كانت المادة ذات طبيعة علمية تخدم قاعدة عريضة من الطلبة ، فقد آثرت الابتعاد عن غلو التنظير والاكتفاء بالإشارة إلى التجريد الرياضي بالقدر القليل المناسب سواء كان ذلك نصا أو برهاناً .

وقد راعى هذا الكتاب المادة العلمية المطلوبة لمنهج يعادل ثلاث ساعات فصلية وربما يزيد قليلاً . أما المحتوى فربما كان قياسيا لكثير من جامعات العالم وهو خاضع للمحتويات التي أقرها قسم الرياضيات في جامعة الملك عبد العزيز بجدة .

أما الإطار العام لهذا الكتاب فقد حاولت جهدي أن يكون على مستوى يناسب عصرنا هذا من حيث الترتيب والعرض والإخراج مما تشتمل عليه كثير من الكتب الأجنبية الحديثة من جودة في الإخراج وجمال في العرض وأخذ بأسباب التقنية لخدمة التعليم الجامعي من خلال الكتاب العلمي والمعرفي . هذا ويمكن القول بأن الكتاب يتضمن الخصائص التالية :

- لكل باب مقدمة موجزة تعطي نبذة مختصرة عن محتويات ذلك الباب .
- تلخيص خطوات الحل حتى يسهل الرجوع إليها والتركيز عليها ، وفي ذلك تقليل من عناء البحث بين السطور المتتالية المتشابكة ، كما فيه ترتيب وإراحة للنظر .
- امثلة محلولة متعددة ، وكما هو متوقع منها ، تشرح الخطوات العامة للحل كما تتعرض لبعض الصعاب التي قد تصادف الطالب عند التطبيق .

- تمارين كثيرة تساعد الطالب على الممارسة لرفع مستوى كفاءته وقدراته العلمية في المادة .
- ملخص موجز في نهاية كل باب يعطي خلاصة وافية لما اشتمل عليه الباب من أفكار رئيسية هامة .
- تمارين عامة في نهاية كل باب . وهي مصدر هام للأستاذ والطالب . فمنها يمكن انتقاء أسئلة الامتحانات ، ومنها ما يعين الطالب على حسن الاستذكار لهذه الامتحانات . وهي عموما كثيرة في عددها شاملة في محتواها .

وختاما فإنني أتوجه إلى الله بالثناء والحمد ثم بالشكر والعرفان لكل من ساهم ويساهم في إخراج هذا الكتاب إلى حيز الوجود أفراداً ومجالس ولجاناً سواء بالكلمة النيرة أو بالفكرة الجيدة أو بالرأي السديد أو الطباعة المتقنة أو الإخراج في ثوب قشيب ، وأخص بالشكر المجلس العلمي بالجامعة وكذلك مركز النشر العلمي لما يبذلاه من جهد في سبيل إخراج الكتاب العلمي من حيز الفكرة إلى عالم التنفيذ .

ولله الحمد من قبل ومن بعد .

المؤلف

ذي القعدة ١٤١٢هـ

المحتويات

الباب الأول

مقدمة للمعادلات التفاضلية

■ تمهيد وتعريفات أساسية ■ منشأ المعادلات التفاضلية ■ المعادلات التفاضلية لعائلة من المنحنيات ■ ملخص الباب ■ تمارين عامة .

١-١ تمهيد وتعريفات أساسية

يلجأ الباحثون في كثير من المسائل العلمية والهندسية إلى تصميم نموذج رياضي للمساعدة في فهم الظاهرة الطبيعية . وهذه النماذج غالبا ما تؤدي إلى صياغة معادلة تربط بين دالة مجهولة وبعض من مشتقاتها . وهذه العلاقة أو الرابطة هي ما يُسمى بالمعادلة التفاضلية .

تعريف ١ . المعادلة التفاضلية العادية هي معادلة رياضية تحتوي علي مشتقات متغير تابع y بالنسبة لمتغير مستقل واحد x .

ويهدف هذا الكتاب إلى دراسة معظم الطرق المختلفة المتوافرة لحل بعض المعادلات التفاضلية ، أي أننا نسعى إلى إيجاد الدالة أو الدوال التي تحقق المعادلة التفاضلية . وفيما يلي بعض الامثلة على المعادلات التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx} = \sin x \qquad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k\,y = 0 \qquad (2)$$

$$\left(t^2 + x^2\right)dt - 2t\,x\,dx = 0 \qquad (3)$$

$$y'' - 7(y')^2 - 3xy = x \qquad (4)$$

$$2y''' + x^2y'' - y' = -x \qquad (5)$$

وتُصنّف المعادلات التفاضلية حسب الرتبة ، فيقال إن رتبتها هي رتبة أكبر مشتقه تظهر في المعادلة . فمثلا المعادلة (1) من الرتبة الاولى ، وكذلك المعادلة (3) . أما المعادلتان (2) ،(4) فمن الرتبة الثانية ، وأما المعادلة (5) فمن الرتبة الثالثة .

ويقال إن المعادلة التفاضلية العادية خطية إذا كانت في الصورة التالية :

$$a_n(x)\,\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\,\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y = R(x)$$

ويُلاحظ إن هذه المعادلة تتميز : (أولا) بأن المتغير التابع y وجميع مشتقاته من الدرجة الأولى ، أي أن أس y أو مشتقاته هو 1 ، (ثانيا) أن المعاملات تعتمد على المتغير المستقل x فقط .

ويقال إن المعادلة التفاضلية العادية غير خطية إذا لم تكن خطية .

تعريف ٢ . لتكن $y = y(x)$ دالة معرفة على فترة مفتوحة I وقابلة للاشتقاق عدد n من المرات على نفس الفترة I . إذا كانت y تحقق على الفترة I معادلة تفاضلية من الرتبة n ، فإن y تُسمى عندئذ حلا للمعادلة على هذه الفترة .

مثال ١. الدالة $y = \frac{x^4}{16}$ تعتبر حلا للمعادلة غير الخطية

$$\frac{dy}{dx} - x\,y^{1/2} = 0$$

في الفترة $-\infty < x < \infty$. ذلك أن

$$\frac{dy}{dx} = 4\ \frac{x^3}{16} = \frac{x^3}{4}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد أن

$$\frac{dy}{dx} - x\,y^{1/2} = \frac{x^3}{4} - x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{x^3}{4} - x\,\frac{x^2}{4} = 0$$

لأي عدد حقيقي x . لاحظ أن الدالّة $y = 0$ تعتبر حلا بدهياً .

مثال ٢. المعادلة التفاضلية

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2 = 0$$

وكذلك المعادلة التفاضلية

$$2\,(y')^2 + y^2 + 1 = 0$$

ليس لهما حلول حقيقية . لماذا يا ترى ؟

ويمكن أيضا تصنيف حلول المعادلات التفاضلية إلى نوعين : حل صريح ، وحل ضمني . فالحل الصريح هو إعطاء التابع بمعلومية المتغير المستقل . وأما الحل الضمني فهو عبارة عن علاقة في متغيرين $G(x,y) = 0$ ينتج عن اشتقاقها ضمنيا المعادلة التفاضلية الأصلية .

مثال ٣. الدالّة $y = x\,e^x$ تعتبر حلا صريحا للمعادلة التفاضلية

$$y'' - 2y' + y = 0\,,$$

وللتأكد من ذلك نجد أولا

$$y' = x\,e^x + e^x$$

ثم نجد

$$y'' = x\,e^x + 2\,e^x$$

وبالتعويض نحصل على

$$y'' - 2y' + y = (xe^x + 2\,e^x) - 2x\,e^x - 2e^x + xe^x = 0$$

لأي عدد حقيقي x .

مثال ٤. العلاقة

$$G(x,y) = x^2 + y^2 - 4$$

على الفترة $-2 < x < 2$ تعتبر حلا ضمنيا للمعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = -\ \frac{x}{y}$$

ذلك أن الاشتقاق الضمني للعلاقة بالنسبة للمتغير x يعطي

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

ومنه

$$2x + 2y\,\frac{dy}{dx} = 0$$

أو

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

تمارين

حدد رتبة كل من المعادلات التفاضلية التالية مبينا فيما إذا كانت خطية أم لا :

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + p^2\,x = 0$ (2) $\dfrac{d^2w}{dt^2} = k^2\,\dfrac{d^2w}{dx^2}$

(3) $yy' = \cos x$ (4) $y''' - 3y' + 2y = 0$

(5) $(w'')^2 - 2(w')^4 + y\,w = 0$ (6) $y'' - 2y' + 3y = x^2 - \sin x$

(7) $x\,(y'')^2 + y^2 = 0$ (8) $-3y''' - y + 2x^2 = \cos x$

اثبت أن الدالّة (الدوال) المعطاة في كل مما يلي هي حل للمعادلة التفاضلية المكتوبة على يسارها ، وحيثما وجد c_1 , c_2 فهما يرمزان إلى ثوابت اختيارية :

(9) $y'' - y = 0;\quad y_1(x) = e^x\ ,\ y_2(x) = \cosh x$

(10) $y' = 25 + y^2\ ;\quad y = 5\tan 5x$

(11) $2x^2y'' + 3xy' - y = 0\ ;\quad x > 0\ ;\ y_1(x) = c_1\sqrt{x}\ ,\ y_2(x) = c_2x^{-1}$

(12) $x^2dy + 2xy\ dx = 0;\quad y = -x^{-2}$

(13) $\dfrac{dy}{dx} - 2y = e^{3x}\ ;\ y = e^{3x} + 10e^{2x}$

(14) $(y')^3 + xy' = y\ ;\quad y = x + 1$

(15) $\dfrac{dx}{dt} = (2 - x)(1 - x)\ ;\quad \ln\left(\dfrac{2 - x}{1 - x}\right) = t$

(16) $y' - \dfrac{y}{x} = 1;\quad y = x\ \ln x\ ;\ x > 0$

١-٢ منشأ المعادلات التفاضلية

قد لا يكون من المناسب أن يجتاز الطالب مادة المعادلات التفاضلية دون أن يحظى بالحد الأدنى من المعرفة عن بعض أسباب نشوء هذه المادة .

إن صياغة مسألة ما في شكل رياضي له فوائد جمة فهي تحدونا أولا إلى أن نسرد بوضوح المسألة التي نحن بصددها . فأي مسألة في عالم الواقع تشوبها عمليات معقدة ذات علاقات كثيرة ومختلفة ، وقبل أن نعالجها رياضيا لابد لنا أن نحدد المتغيرات التي ستوضع موضع الاعتبار والأخرى التي نتجاهلها . وعادة ما نتمكن من وضع هذه المتغيرات والعلاقات القائمة بينها في صيغ قوانين ونظريات ومعادلات تشكل في مجموعها الشكل المثالي للنموذج الرياضي المطلوب .

إن المطلوب هو صياغة المسألة الناتجة عن التفاعلات الكائنة في عالم الواقع في صورة رياضية مناسبة . وهذا يتطلب فهما حقيقيا لأبعاد المشكلة من الناحية الحقيقية – كما في عالم الواقع – كما تتطلب فهما وإلماما بالأدوات الرياضية التي يمكن أن نفيد منها في إيجاد الحل المناسب .

ولعل مادة المعادلات التفاضلية من أهم الوسائل التي تزخر بها المكتبة الرياضية لإيجاد الحل المناسب رياضيا ومن ثم ترجمته إلى عالم الواقع إلى مادة مكتوبة مفيدة تساهم في حل المسألة المطلوبة على الوجه الأقرب إلى تحقيق الفائدة المرجوة .

وفي الباب الثالث من هذا الكتاب أمثلة مختلفة من عالم الواقع يتضح من خلالها كيفية التعامل مع مسألة إنسانية أو علمية بحتة من منظور رياضي تلعب فيه مادة المعادلات التفاضلية دورا أساسيا هاما .

وفي البند التالي نتحدث عن كيفية إيجاد المعادلة التفاضلية لعائلة من المنحنيات التي لها بعض الخواص التي تميزها .

١-٣ المعادلة التفاضلية لعائلة من المنحنيات

إن الهدف الأساسي من هذا الكتاب هو الوصول بالطالب إلى مرحلة التمكن من حل بعض الأنواع الشائعة من المعادلات التفاضلية . وبالتجربة نجد أن الوصول إلى المعادلة التفاضلية في حد ذاتها يمكن أن يتم من طرق مختلفة ، إلا أننا في هذا البند سنبدأ بعلاقة تتضمن ثوابت اختيارية ، ثم ننطلق من هذه العلاقة لنجد المعادلة التفاضلية التي هى أصل العلاقة ، وذلك عن طريق التخلص من الثوابت الاختيارية . وبمعنى آخر فإننا نبدأ بالحل المعطى لنصل إلى أصل المسألة .

وهناك طرق مختلفة للتخلص من الثوابت الاختيارية تختلف باختلاف موقع هذه الثوابت من العلاقة المعطاة . فالطريقة المثلى لحل مسألة ما قد لا تجدى لحل مسألة أخرى ، إلا أن هناك حقيقة واحدة تظل ماثلة ، وهي أن كل اشتقاق للعلاقة المعطاة ينتج عنها علاقة جديدة ، وعليه فإن عدد مرات الاشتقاق يجب أن يساوي عدد الثوابت الاختيارية التي يجب إزالتها . وفي كل مرة علينا أن نجد المعادلة التفاضلية التي لها الخصائص التالية :

(أ) أن تكون ذات رتبة مساوية لعدد الثوابت الاختيارية الموجودة في العلاقة المعطاة.

(ب) أن تكون متفقة مع العلاقة الأصلية ، أي أن حلها يؤدي إلى العلاقة الأصلية .

(ج) أن تكون خالية من الثوابت الاختيارية .

ولنبدأ الآن باستعراض بعض الأمثلة على كيفية التخلص من الثوابت الاختيارية والوصول إلى المعادلة التفاضلية التي تمثل العلاقة المعطاة .

مثال ١. تخلص من الثابتين الاختياريين في العلاقة

$$y = c_1 e^x + c_2 .$$

الحل : الاشتقاقان الأول والثاني للعلاقة ينتجان المعادلتين

$$y' = c_1 e^x$$
$$y'' = c_1 e^x$$

وعليه فالمعادلة التفاضلية المطلوبة هي

$$y'' = y'$$

أو

$$y'' - y' = 0$$

والواقع أن العلاقة المعطاة تمثل في حقيقة الأمر عائلة من المنحنيات ذات عدد من الوسطاء مساو لعدد الثوابت الاختيارية . فمثلا العلاقة المعطاة في المثال السابق تمثل عائلة من المنحنيات ذات وسيطين ، بينما تمثل العلاقة

$$(x - c)^2 + (y - c)^2 = 2c^2$$

عائلة من المنحنيات ذات وسيط واحد فقط . وهي تمثل في حقيقة الأمر معادلة مجموعة الدوائر التي تقع مراكزها على الخط المستقيم $y = x$ وتمر في نفس الوقت بنقطة الأصل .

مثال ٢. أوجد المعادلة التفاضلية لعائلة المنحنيات التي تمثلها المعادلة $y = cx^3$.

الحل : حيث إن المعادلة تحوي وسيطا واحدا فقط ، فالمتوقع أن ننتهي إلى معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى . وبمفاضلة الطرفين نحصل على

$$y' = 3c\,x^2$$

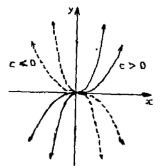
لكن $c = \dfrac{y}{x^3}$ مما يؤدي إلى

$$y' = 3\left(\frac{y}{x^3}\right)x^2 = \frac{3y}{x}$$

وبالتالي فإن المعادلة التفاضلية المطلوبة هي

$$xy' - 3y = 0$$

وفي الشكل ١-١ تبدو عائلة المنحنيات التي تمثلها المعادلة المعطاة .



الشكل ١-١

عائلة المنحنيات التي تمثلها المعادلة $y = cx^3$

مثال ٣. أوجد المعادلة التفاضلية للعائلة التالية من المنحنيات ذات الثابتين

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + x \qquad (1)$$

الحل : بإجراء الاشتقاقين الأول والثاني نحصل على

$$y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + 1$$

$$y'' = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \qquad (2)$$

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نحصل على

$$y'' - y = -x .$$

مثال ٤. أوجد المعادلة التفاضلية التي تصف عائلة الدوائر التي تمر بنقطة الأصل.

الحل : كما يظهر من الشكل ١-٢ ، فإن الشكل العام لمعادلة هذه الدوائر هو

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = \left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)^2$$

أو

$$x^2 - 2hx + y^2 - 2ky = 0 \qquad (3)$$

وباشتقاق المعادلة (3) ضمنيا مرتين نحصل إلى

$$x - h + y\,y' - ky' = 0, \qquad (4)$$
$$1 + y\,y'' + (y')^2 - k\,y'' = 0\,. \qquad (5)$$

وباستعمال المعادلة الأصلية لإيجاد قيمة h نصل إلى

$$h = \frac{x^2 + y^2 - 2ky}{2x}$$

وبالتعويض في (4) ينتج لدينا أن

$$x - \frac{x^2 + y^2 - 2ky}{2x} + yy' - ky' = 0 \qquad (6)$$

ثم نجد قيمة k من (6) لنحصل على

$$k = \frac{x^2 - y^2 + 2xyy'}{2(xy' - y)} \qquad (7)$$

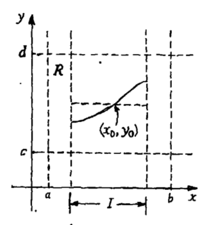
وبالتعويض من (7) في المعادلة (5) نحصل على المعادلة غير الخطية

$$1 + yy'' + (y')^2 - \frac{(x^2 - y^2 + 2xyy')}{2(xy' - y)}\,y'' = 0$$

أو

$$(x^2 + y^2)y'' + 2\,[(y')^2 + 1]\,(y - xy') = 0$$

هذا ويمكن الوصول إلى نفس النتيجة باشتقاق طرفي المعادلة (7) باستعمال قانون النسبة للاشتقاق .



الشكل ١-٢ .

عائلة الدوائر التي تمر بنقطة الأصل

١-٤ ملخص الباب

في هذا الباب عالجنا بعض التعريفات والمصطلحات الأساسية للمعادلات التفاضلية العادية ، فقد صنفنا المعادلات التفاضلية العادية حسب الرتبة ، وكونها خطية أو غير خطية .

أما حل المعادلة التفاضلية العادية فهو أي دالة أو علاقة ذات عدد كاف من الاشتقاقات ، والتي تحقق المعادلة في فترة معينة .

وحل المعادلة إما أن يكون صريحا وهو الذي يحقق المعادلة على فترة ما، وإما أن يكون ضمنيا ، وهو عبارة عن علاقة ينتج عنها دالة ضمنية تشكل حلا ضمنيا للمعادلة .

وفي البند الثالث عالجنا طريقة إيجاد المعادلة التفاضلية لعائلة من المنحنيات عن طريق التخلص من الثوابت الموجودة في المعادلة الأصلية للعائلة والتي يساوي عددها عدد مرات الاشتقاق اللازمة للتخلص منها .

١-٥ تمارين عامة

تخلص من الثوابت الاختيارية في كل مما يلي :

(1) $x \sin y + x^2 y = c$

(2) $x y^2 - 1 = cy$

(3) $x = ct + c^2 - 1$

(4) $y = c_1 + c_2 e^{3x}$

(5) $c_1 y^2 = 4ax$

(6) $y = e^x + c_2 e^{-x}$

(7) $y^2 = 4ax$

(8) $y = x + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

(9) $x = at^2 + bt + c$

(10) $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x}$

(11) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$

(12) $y = c_1e^{-x} - c_2xe^{-x}$

(13) $y = c_1e^{2x}\cos 3x + c_2e^{2x}\sin 3x$

(14) $y = c_1x^2 + c_2e^{-x}$

في كل مما يلي ، أوجد المعادلة التفاضلية لعائلة المنحنيات المستوية المعطاة معادلتها وارسم بعضا من أفراد كل عائلة :

١٥ – عائلة الخطوط المستقيمة التي تمر بنقطة الأصل .

١٦ – عائلة الخطوط المستقيمة التي يتساوى ميلها مع الجزء المقتطع من محور الصادات .

١٧ – عائلة الخطوط المستقيمة ذات البعد الثابت p من نقطة الأصل .

١٨ – عائلة الدوائر التي تقع مراكزها على محور السينات .

١٩ – عائلة الخطوط المستقيمة التي يتساوى ميلها مع الجزء المقتطع من محور السينات .

٢٠ – عائلة الدوائر المماسة لمحور الصادات وبنصف قطر r .

٢١ – عائلة الدوائر المماسة لمحور السينات .

٢٢ – عائلة الدوائر التي تقع مراكزها على الخط المستقيم $y = -x$ وتمر بنقطة الأصل .

الباب الثاني

المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى

■ مقدمة ■ نظرية وجود الحل ووحدانيته ■ المعادلات ذات المتغيرات المنفصلة ■ المعادلات المتجانسة ■ المعادلات الخطية ■ ملخص الباب ■ تمارين عامة .

٢-١ مقدمة

سنعرض في هذا الباب بعض طرق حل أنماط معينة من المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى . وتعدد طرق الحل المختلفة ناشئ عن تعدد أنماط هذه المعادلات التفاضلية . فالطريقة التي تتبع لحل معادلة ما ، قد لا تكون مناسبة لحل معادلة أخرى ، ولهذا فإن على الطالب أن يبني داخل ذهنه الاحساس الرياضي الذي يمكنه من تمييز نمط المعادلة التفاضلية ، وبالتالي اختيار الطريقة المثلى وربما الطريقة الوحيدة لحل المعادلة المعنية .

ولعل هذا الباب من أهم الأبواب التي يستطيع القارىء من خلالها بناء الملكة الذهنية الرياضية التي ستمكنه من اكمال المشوار مع هذه المادة في يسر يتطلب قدرا طيبا من التركيز والمثابرة على حل التمارين التي ترسخ في ذهنه هذه الملكة وهذا الاحساس .

ومن البديهي جدا أن نتمكن من العلم مسبقا بوجود حل للمعادلة التفاضلية أم لا ، إذ أن العلم بإستحالة وجود حل للمعادلة التفاضلية يوفر علينا كثيرا من الجهد الذي سيبذل في محاولة إيجاد هذا الحل . أما إذا علمنا بامكانية إيجاد حل للمعادلة التفاضلية فعندها يمكن الشروع في إيجاد ذلك الحل . أما الطريقة الأفضل بلا شك فهي الشروع مباشرة في إيجاد الحل ، وبهذا نثبت وجود الحل ونقدم الحل في نفس الوقت ، وذلك من باب ضرب عصفورين بحجر واحد .

وفي البند التالي سنعالج تحت أي الظروف المحيطة بالمعادلة التفاضلية يمكننا الجزم بوجود حل لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى .

٢-٢ نظرية وجود الحل ووحدانيته

مسألة القيمة الابتدائية . لنفترض أن لدينا المعادلة التفاضلية ذات الرتبةالأولى

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (1)$$

الخاضعة للشرط الابتدائي

$$y(x_0) = y_0 \qquad (2)$$

حيث x_0 نقطة داخل الفترة I و y_0 أي عدد حقيقي . إذا كان المطلوب في المسألة حل المعادلة (1) طبقا للشرط (2) ، عندئذ تُسمى هذه المسألة مسألة القيمة الابتدائية ، كما أن الشرط (2) يُسمى الشرط الابتدائي .

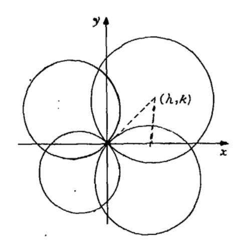
نظرية ١ . ليكن R على شكل مستطيل في المستوى x–y معرف بالمتراجحتين $a < x < b \,, c < y < d$ والمحتوي على النقطة (x_0,y_0) بداخله . إذا كان كل من $f(x,y)$ و $\partial f / \partial y$ متصلا على R ، عندها توجد فترة I مركزها النقطة x_0 ودالة وحيدة $y(x)$ معرفة على الفترة I ومستوفية لمسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

طبقا للشرط $y(x_0) = y_0$.

ولعل هذه النظرية من أشهر نظريات وجود الحل ووحدانيته للمعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى ، ويعود السبب إلى أنه من السهل نسبيا التأكد من استمرارية $f(x,y)$ و $\partial f / \partial y$ أو عدمه . وكما ذكرنا في البند السابق فعلى القارىء ملاحظة الفارق الفعلي بين العلم بوجود الحل وتقديم حل . فتقديم حل يعني بالضرورة وجود حل للمعادلة التفاضلية . أما العلم بوجود حل قد لا يعني أنه من السهل إيجاد الحل فعلا .

ملاحظة . لعل من المفيد ذكره هنا أن الشروط المذكورة في النظرية كافية لوجود الحل ووحدانيته ، ولكن هذه الشروط ليست ضرورية حتما فقد لا تنطبق هذه الشروط على معادلة تفاضلية ما ، ومع هذا فقد يحدث أحد هذه الاحتمالات الثلاثة : (أ) لايوجد حل ، (ب) يوجد أكثر من حل ، (ج) يوجد حل وحيد .



الشكل ٢-١

تعريف . إذا كانت الدالة y حلا للمعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الأولى $y' = f(x,y)$ بحيث تحتوي y على ثابت اختياري واحد ، عندها تسمى y حلا عاما للمعادلة $y' = f(x,y)$.

٢-٣ المعادلات ذوات المتغيرات المنفصلة

لعل أبسط المعادلات التفاضلية حلا هي تلك التي يمكن كتابتها على الهيئة

$$\frac{dy}{dx} = g(x)$$

والتي يمكن حلها بإيجاد تكامل الطرفين

$$y = \int g(x)\, dx + c$$

ولنبدأ دراستنا لطرق إيجاد حلول المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى بدراسة المعادلة ذات الشكل العام

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

حيث M , N دالّتان في كلا المتغيرين x, y ، أي أن

$$M = M(x,y) \quad , \quad N = N(x,y)$$

مثال ١. المعادلة التفاضلية $x^2 \sin y \;\; dy \;\; + \dfrac{y^2}{x}\, dx = 0$ من الرتبة الأولى وفيها

$$M = \frac{y^2}{x} \;\; , \; N = x^2 \sin y$$

لاحظ أن M ترمز للدالّة التي تعمل كمعامل للتفاضلة dx بينما N معامل dy .

تعريف ١. في المعادلة (2) إذا كانت M دالّة في x فقط و N دالّة في y فقط ، أي إذا كانت المعادلة (2) على الصورة

$$A(x)\,dx + B(y)\,dy = 0 \qquad (3)$$

فعندئذ يقال إن المعادلة (2) من ذوات المتغيرات المنفصلة .

طريقة حل المعادلة التفاضلية ذات المتغيرات المنفصلة

لحل المعادلة

$$A(x)\,dx + B(y)\,dy = 0$$

فإننا نضعها أولا في الصورة

$$B(y)\,dy = -\,A(x)\,dx$$

ثم نكامل الطرفين : الأيسر بالنسبة للمتغير y ، والأيمن بالنسبة لـ x لنصل إلى

$$\int B(y)\,dy = -\int A(x)\,dx \qquad (4)$$

أو

$$H(y) = G(x) + c$$

حيث c ثابت اختياري يمكن إيجاد قيمته في حالة وجود شرط ابتدائي .

مثال ٢. أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$(1+x)\,dy - y\,dx = 0$$

الحل : بالقسمة على $y\,(1+x)$ نحصل على

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{1+x} = 0$$

وبالنقل نصل إلى

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$$

وبالتكامل نحصل على

$$\ln|y| = \ln|1+x| + c_1 = \ln|1+x| + \ln c$$
$$= \ln c\,|1+x|$$

أو

$$y = c\,(1+x)$$

حيث $c > 0$. وكان بامكاننا أن نضع $c_1 = \ln c$ إبتداءً حيث أنه قيمة اختيارية هو الآخر . لاحظ أن لدينا الحرية الكاملة في اختيار الثابت الاختياري المناسب للمسألة التي بين أيدينا ، كان نستعمل $\ln|c|$, e^c , $\sin 2c$ أو $3c$ إلخ .

مثال ٣. حل المعادلة التفاضلية

$$x\,y^2\,dx + (y+1)\,e^{-x}\,dy = 0, \quad y \neq 0$$

الحل : بضرب المعادلة في e^x والقسمة على y^3 نحصل على

$$x\,e^x\,dx + \frac{(y+1)}{y^3}\,dy = 0$$

أو

$$x\,e^x\,dx + (y^{-2} + y^{-3})\,dy = 0$$

بوضع المعادلة في الشكل (4) ثم مكاملة الطرفين (بالتجزئة بالنسبة لعامل $x\ dx$)

$$e^x(x-1) = \frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2} + c$$

مثال ٤. حل المعادلة التفاضلية التالية الخاضعة للشرط الابتدائي $y(2) = 3$

$$2xyy' = 1 + y^2$$

الحل : أولا نضع المعادلة في الشكل (4) مع ملاحظة أن $y' = \frac{dy}{dx}$

بالقسمة على $x\left(1 + y^2\right)$

$$\frac{2y}{1+y^2}\,\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

أو

$$\frac{2y}{1+y^2}\,dy = \frac{dx}{x}$$

ثم نكامل الطرفين لنصل إلى

$$\ln\left(1+y^2\right) = \ln|x| + \ln|c| = \ln|cx|$$

أو

$$1 + y^2 = cx$$

وبالتعويض من الشرط الابتدائي نصل إلى

$$1 + 9 = 2c$$

أو

$$c = 5$$

وبالتعويض عن قيمة c نحصل على

$$1 + y^2 = 5x$$

أو

$$y^2 = 5x - 1$$

ومنه

$$y = \sqrt{5x - 1}$$

شريطة أن يكون $x \geq \frac{1}{5}$.

مثال ٥. أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية

$$\csc^3 x \;\; dy = \cot^2 y \;\; dx$$

حيث $y = 0$ عندما تساوي x الصفر .

الحل : بفصل المتغيرات نحصل على

$$\tan^2 y \;\; dy = \sin^3 x \; dx$$

بتكامل الطرفين نحصل على الحل الضمني الممثل لمجموعة الحلول

$$3\,(\tan y - y) = \cos^3 x - 3\cos x + c$$

وحيث أننا نسعى لتحديد عنصر العائلة الذى يمر بالنقطة (0,0) ، فإننا نعوض لنحصل على

$$0 = 1 - 3 + c$$

أو

$$c = 2$$

إذا الحل الوحيد للمسألة هو الحل الضمني

$$3\,(\tan y - y\,) = \cos^3 x - 3\cos x + 2$$

ملاحظة. على القارىء أن يلاحظ كيف تم تطبيق نص نظرية وجود الحل ووحدانيته المذكورة في البند السابق لتؤكد أننا وجدنا الحل الضمني الوحيد لمسألة القيمة الابتدائية ، وهذا الحل متصل لجميع قيم y .

تمارين

أوجد فيما يلي الحل العام :

(1) $(1 - x^2)y' = y^2$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \cos 2x$

(3) $2\,dx + e^{3x} dy \;= 0$

(4) $\sin x \sin y \; dx - \cos x \cos y \; dy = 0$

(5) $\dfrac{dy}{dx} = \sin x \cos y$

(6) $xy' = 4y$

(7) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - 1}{y^2}$

(8) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 0$

(9) $\dfrac{dy}{dx} = y\,(2 + \sin x)$

(10) $x^2 dx + y\ (x - 1)dy = 0$

(11) $y' = e^{3x + 2y}$

(12) $x\ \cos^2 y\ \ dx + \tan y\ \ dy = 0$

(13) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1 + 2y^2}{y\ \sin x}$

(14) $y \sin x\ e^{\cos x}\ dx + y^{-1}\ dy = 0$

(15) $(e^{2x} + 4)y' = y\ e^{2x}$

(16) $(1 + \ln x)\ dx + (1 + \ln y)\ dy = 0$

حل فيما يلي مسائل القيم الابتدائية التالية :

(17) $xyy' = 1 + y^2\ ;\ \ y(2) = 3$

(18) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 + 4x + 2}{2y + 1}\ ;\ \ y(0) = -1$

(19) $(e^{-y} + 1) \sin x\ \ dx = (1 + \cos x)\ dy;\ \ y(0) = 0$

(20) $\dfrac{dx}{dt} = 4(x^2 + 1)\ ;\ \ x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

(21) $y' = x^2(1 + y);\ \ y(0) = 3$

(22) $y' = y\ \sin x\ ;\ \ y(\pi) = -3$

(23) $x^2 y' = y - xy\ ;\ \ y(-1) = -1$

(24) $y' = (1 + y^2) \tan x;\ \ y(0) = \sqrt{3}$

(25) $2y\ dx = 3x\ dy\ ;\ \ y(2) = 1$

(26) $2y\ dx = 3x\ dy\ ;\ \ y(2) = -1$

٢-٤ المعادلات التامة

لاحظنا في البند السابق أنه إذا تمكنا من وضع المعادلة التفاضلية في الصورة

$$A(x)\,dx + B(y)\,dy = 0$$

فإنه يمكن إيجاد مجموعة الحل المطلوبة ، وذلك عن طريق إيجاد دالّة تكون مشتقها مساوية للمقدار

$$A(x)\,dx + B(y)\,dy$$

وفي هذا البند نحاول أن نطبق نفس الفكرة على معادلات من الشكل

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (1)$$

والتي لا يمكن فصل متغيراتها.

تعريف ١. تسمى $M\,dx + N\,dy$ تفاضلة تامة في المستطيل R إذا وجدت دالّة F معرفة على R بحيث

$$dF = M\,dx + N\,dy \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N \qquad (3)$$

لجميع النقاط (x,y) في المستطيل R ، وفي هذه الحالة يقال أن $M\,dx + N\,dy$ تفاضلة تامة للدالة F ، ويقال أن المعادلة (1) معادلة تفاضلية تامة . وسنجد بسهولة أن حلها العام يعطى على الصورة

$$F(x,y) = c \qquad (4)$$

حيث c ثابت اختياري .

لاحظ أن اشتقاق المعادلة (4) يؤدي إلى

$$dF = 0$$

أو كما جاء في (2)

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

وهي المعادلة الأصلية (1) التي نرغب في إيجاد مجموعة حل لها.

أما السؤال البديهي التالي فهو : كيف نستطيع أن نعرف ما إذا كانت $M\,dx + N\,dy$ تفاضلة تامة أم لا ؟ وإذا ما كانت تامة كيف نجد الدالّة F التي تمثل مجموعة حل للمعادلة ؟

وسنحاول الإجابة على هذين السؤالين في الأسطر التالية :

إختبار تمام المعادلة

نظرية ١. بإفتراض أن المشتقات الجزئية الأولى للدالتين $M(x,y)$, $N(x,y)$ متصلة في المستطيل R ، فإن الصورة

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \qquad (5)$$

تشكل تفاضلة تامة لدالة F إذا وفقط إذا كان

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (6)$$

لجميع النقاط (x,y) في المستطيل R .

البرهان : سنبرهن أن الشرط (6) ضروري ، أي أنه إذا كانت (5) تفاضلة تامة لدالة F فلا بد أن تتحقق (6). وحيث أن (5) تفاضلة تامة لدالة F ، فإن

$$M = \frac{\partial F}{\partial x} \quad , \quad N = \frac{\partial F}{\partial y} \qquad (7)$$

وبإستعمال (7) نحصل على

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$$

وحيث أن المشتقات الجزئية التي من الرتبة الأولى للدالتين M, N متصلة في R، فإننا نجد أن

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$$

ولاثبات كفاية الشرط نقترح أن تكون الدالة F على الصورة

$$F = \int_{x_0}^{x} M(x,y)\, dx + g(y)$$

ونختار $g(y)$ بحيث

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N$$

فنرى بسهولة أن

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M$$

وأن

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\, dx + g'(y)$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\, dx + g'(y)$$

$$= N(x,y) - N(x_0,y) + g'(y)$$

أي أن

$$g'(y) = N(x_0,y)$$

وبالتالي نحصل على

$$g(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\, dy$$

حيث (x_0,y_0) نقطة اختيارية في R . وهذا هو المطلوب .

من هذه النظرية نجد أنه إذا كانت المعادلة (1) معادلة تفاضلية تامة ، فإن حلها العام هو

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\, dy = c \qquad (8)$$

حيث c ثابت اختيارى ، (x_0,y_0) أي نقطة داخل R .

وفيما يلي نستعرض بعض الأمثلة عن المعادلات التفاضلية التامة .

مثال ١. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\left(2xy-3x^2\right)dx+\left(x^2+2y\right)dy=0$$

الحل : نلاحظ أن

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x=\frac{\partial N}{\partial x}$$

أي أنه لدينا معادلة تامة حلها العام هو

$$\int_0^x (2xy-3x^2)\,dx+\int_0^y 2y\,dy=c$$

أو

$$x^2y-x^3+y^2=c.$$

(لاحظ أننا اخترنا $x_0=y_0=0$ لان كلا من الدالتين M,N معرفة عند $(0,0)$ وبالطبع هذا أبسط اختيار ممكن).

مثال ٢. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(e^{2y}-y\cos xy)\,dx+(2xe^{2y}-x\cos xy-3y^2)\,dy=0$$

الحل : نلاحظ بسهولة أن

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2e^{2y}-\cos xy+xy\sin xy=\frac{\partial N}{\partial x}$$

أي أنه لدينا معادلة تامة ، وعليه فإن الحل العام هو

$$\int_0^x (e^{2y}-y\cos xy)\,dx+\int_0^y(-3y^2)\,dy=c$$

أو

$$xe^{2y}-\sin xy-y^3=c.$$

مثال ٣. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(xy^2 + y - x)\ dx + x(xy + 1)\ dy = 0$$

المحققة للشرط الابتدائي $y(-1) = 1$.

الحل : نلاحظ أن

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy + 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

أي أن لدينا معادلة تامة ، وبالتالي فحلها العام هو :

$$\int_0^x (xy^2 + y - x)\, dx + \int_0^y 0\, dy = c$$

أو

$$\frac{x^2y^2}{2} + yx - \frac{x^2}{2} = c \qquad (9)$$

وباستخدام الشرط الابتدائي $y(-1) = 1$ نعوض في المعادلة (9) لنحصل إلى

$$\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = -1 = c$$

وبالتعويض عن c في المعادلة (9) وضرب كل حد فيها في العدد -2 نحصل على الحل الخاص

$$x^2 - 2yx - x^2y^2 = 2$$

تمارين

فيما يلي اختبر تمام المعادلة وأوجد حلها في حالة تمامها . وفي حالة عدم تمامها حاول تجربة طريقة البند السابق :

(1) $(2x + 4)\, dx + (3y - 1)\, dy = 0$

(2) $(x + 2y)\, dx + (2x + y)\, dy = 0$

(3) $(y^2 - 2xy + 6x)\, dx - (x^2 - 2xy + 2)\, dy = 0$

(4) $(y^2 + 2y)\, dx - (2xy + x)\, dy = 0$

(5) $(2xy - y)\, dx - (x^2 + x)\, dy = 0$

(6) $(\sin y - y \sin x)\, dx + (\cos x + x \cos y - y)\, dy = 0$

(7) $(2x + y\cos xy)dx + x\cos xy\, dy = 0$

(8) $(w^3 + wz^2 - z)\, dw + (z^3 + w^2 z - w)\, dz = 0$

(9) $x\dfrac{dy}{dx} = 2x e^x - y + 6x^2$

(10) $(y\ln y - e^{xy})\, dx + (y^{-1} + x\ln y)\, dy = 0$

(11) $(2xy - \tan y)\, dx + x(x - \sec^2 y)\, dy = 0$

(12) $\dfrac{2x}{y} dx - \dfrac{x^2}{y^2} dy = 0$

(13) $(1 - 3x^{-1} + y)\, dx + (1 - 3y^{-1} + x)\, dy = 0$

(14) $e^t (y - 1)\, dt + (1 + e^t)\, dy = 0$

(15) $(\cos x \cos y - \cot x)\, dx - \sin x \sin y\, dy = 0$

(16) $(1 + y^2)\, dx + (x^2 y + y)\, dy = 0$

(17) $(x + y)(y - x)\, dx - x(x - 2y)\, dy = 0$

(18) $3y(x^2 - 1)\, dx + (x^3 + 8y - 3x)\, dy = 0; \quad y(0) = 1$

(19) $(x + y)^2\, dx + (2xy + x^2 - 1)\, dy = 0; \quad y(1) = 1$

(20) $(y e^{xy} - 2y^3)\, dx + (xe^{xy} - 6xy^2 - 2y)\, dy = 0; \quad y(0) = 2$

(21) $(4y + 2x - 5)\, dx + (6y + 4x - 1)\, dy = 0; \quad y(-1) = 2$

(22) $(y + e^x)\, dx + (2 + x + y e^y)\, dy = 0; \quad y(0) = 1$

(23) $(xy^2 + x - 2y + 3)\, dx + x^2 y\, dy = 2(x + y)\, dy; \quad y(1) = 1$

٢-٥ المعادلات المتجانسة

تعريف. إذا كانت f دالّة في متغيرين بحيث

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

حيث $\lambda \neq 0$ أي عدد حقيقي ، عندها نقول أن $f(x,y)$ دالّة متجانسة من الدرجة n .

ولنضرب لهذا التعريف المجرد مثلا يقرب فكرة الدالّة المتجانسة من الاذهان ، فكثيرات الحدود التي لكل حد فيها نفس الدرجة مثل

$$x^2 - 4xy + 2y^2$$
$$x^3 + y^3 + x^2 y$$
$$x^4 y^2 + 7xy^5$$

يطلق عليها مسمى كثيرات الحدود المتجانسة . ومن هذا المنطلق يمكننا أن نحدد تجانس المعادلة من عدمه من النظرة الأولى في حالات كثيرة دون الحاجة إلى تطبيق التعريف حرفيا حتى ولو لم تكن الدالة من كثيرات الحدود ، فمثلا الدالّة

$$f(x,y) = 2y^3 e^{y/x} - \frac{x^4}{3x - 2y} \qquad (1)$$

متجانسة ، لأن الحد الاول فيها يشتمل على y^3 مضروبا في المقدار $e^{y/x}$ الذي يعد متجانسا من الدرجة صفر لأنه الدالّة الاسية الطبيعية لكسر تساوت درجة بسطه مع درجة مقامه ، وكذلك الحد الثاني من الدرجة الثالثة لإنه حاصل قسمة مقدار من الدرجة الرابعة على مقدار من الدرجة الأولى .

وفيما يلي سنعطي مثالا نطبق فيه التعريف السابق .

مثال ١. اثبت أن الدالّة المعطاة في (1) متجانسة .

الحل :

$$f(\lambda x, \lambda y) = 2\lambda^3 y^3 e^{\lambda y/\lambda x} - \frac{\lambda^4 x^4}{3\lambda x - 2\lambda y}$$
$$= 2\lambda^3 y^3 e^{y/x} - \frac{\lambda^4 x^4}{\lambda(3x - 2y)}$$
$$= \lambda^3 \left(2y^3 e^{y/x} - \frac{x^4}{3x - 2y} \right) = \lambda^3 f(x,y).$$

وعليه فإن f دالّة متجانسة من الدرجة الثالثة .

وفيما يلى نظريتان ذات أهمية خاصة لما سيليهما من نقاش .

نظرية ١. إذا كانت كلتا الدالتين $M(x,y)$ و $N(x,y)$ متجانستين ومن نفس الدرجة ، فإن الدالّة $\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ متجانسة من الدرجة صفر .

البرهان : طبقا للتعريف فإن .

$$\frac{M(\lambda x,\lambda y)}{N(\lambda x,\lambda y)}=\frac{\lambda^n M(x,y)}{\lambda^n N(x,y)}=\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

حيث n درجة كلٍ من M و N .

نظرية ٢. إذا كانت $f(x,y)$ دالّة متجانسة من الدرجة صفر ، فهي دالّة في y/x فقط .

البرهان : نضع $y=vx$ أو $v=y/x$. في هذه الحالة يجب أن نثبت أن f هي دالّة في المتغير v فقط . لاحظ الآن أن

$$f(x,y)=f(x,vx)=f(x.1,x.v)$$
$$=x^0 f(1,v)=f(1,v) \qquad (2)$$

حيث x لعبت دور λ في تعريف ٢. ومن ثم فإن f دالّة في v فقط .

تعريف. يقال للمعادلة التفاضلية $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ أنها متجانسة إذا كانت كل من N , M متجانسة وبنفس الدرجة .

ولنعد مرة أخرى إلى المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى ولنفترض الآن أن المعادلة

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0 \qquad (3)$$

تتميز بأن كلا من الدالتين N , M متجانستين من نفس الدرجة في المتغيرين x و y . باستعمال النظريتين السابقتين نستنتج أن النسبة $\frac{M}{N}$ دالّة في $\frac{y}{x}$ فقط .

وبقسمة المعادلة (3) على المقدار $N(x,y)$ نحصل على

$$\frac{dy}{dx} + g\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \qquad (4)$$

وهذا بدوره يعرض علينا إدخال متغير جديد v باستعمال التعويض $y = v\,x$ ، ومنه نحصل على

$$dy = v\,dx + x\,dv$$

وبالتعويض في (4) نحصل على المعادلة

$$x\,\frac{dv}{dx} + v + g(v) = 0 \qquad (5)$$

وهي من ذوات المتغيرات المنفصلة . وبتطبيق طريقة البند الثالث يمكننا الحصول على حل للمعادلة (5) في المتغيرين x و v ، ثم نقوم باستبدال v بالكسر $\frac{y}{x}$ للحصول على حل للمعادلة الأصلية (3) .

ملاحظة . كان بإمكاننا الوصول إلى نتيجة مماثله باستعمال التعويض $x = u\,y$. وعلى أية حال فإن على الطالب أن يحاول تطبيق التعويض الأسهل ، علما بأن أيا منهما سيؤدى إلى الحل دون شك ، ولكن من الأفضل سلوك الطريق الأسهل توفيرا للوقت وتقليلا من عمليات التعويض والاختصارات الجبرية .

مثال ٢. حل المعادلة

$$(x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$$

الحل : من الملاحظ أن كلا من الدالتين $M(x,y)$ و $N(x,y)$ متجانسة من الدرجة الثانية . فإذا إخترنا التعويض $y = v\,x$ فسنحصل على

$$(x^2 + v^2x^2)\,dx + (x^2 - x^2v)\,(v\,dx + x\,dv) = 0$$

نقوم الآن بجمع حدود dx على حدة وكذلك حدود dv

$$\left(x^2 + v^2x^2 + x^2\,v - x^2\,v^2\right)dx + x^3\,(1 - v)\,dv = 0$$

أو

$$x^2\,(1 + v)\,dx + x^3(1 - v)\,dv = 0$$

وبفصل المتغيرات نصل إلى

$$\frac{dx}{x}+\left(\frac{1-v}{1+v}\right)dv=0$$

أو

$$\frac{dx}{x}+\left(-1+\frac{2}{1+v}\right)dv=0$$

وبالتكامل ينتج لدينا

$$\ln|x|-v+2\ln|1+v|+\ln|c|=0$$

أو

$$\ln|x|-\frac{y}{x}+2\ln\left|1+\frac{y}{x}\right|+\ln|c|=0$$

وباستعمال قوانين اللوغاريتمات نصل إلى الحل في صورته المناسبة وهي

$$c\,(x+y)^2=x\,e^{y/x}$$

مثال ٣. حل المعادلة

$$y^2\,dx+x\,(x+y)\,dy=0 \qquad (6)$$

الحل : مرة أخرى نلاحظ أن معاملي dx و dy متجانسان من الدرجة الثانية ، وبإمكاننا أن نعوض باستخدام $y=vx$ ، ولكن نظرا لبساطة معامل dx النسبية ، فان من الأفضل اللجوء إلى إستخدام التعويض $x=uy$ ، ومنه $dx=u\,dy+y\,du$ وبالتالي تصير المعادلة (6) إلى المعادلة

$$y^2\,(u\,dy+y\,du)+uy\,(uy+y)\,dy=0$$

أو

$$(u\,dy+y\,du)+u\,(u+1)\,dy=0$$

وبإعادة ترتيب الحدود نصل إلى

$$y\,du+\left(u^2+2u\right)dy=0$$

أو

$$\frac{du}{u(u+2)}+\frac{dy}{y}=0$$

ثم نكامل الطرفين لينتج لدينا (مع ملاحظة أن تكامل الحد الأول يتم بطريقة الكسور الجزئية)

$$\int \frac{du}{2u} - \int \frac{du}{2(u+2)} + \int \frac{dy}{y} = \ln c, \quad c > 0$$

وبالضرب في 2 ثم إجراء التكامل نحصل على

$$\ln u - \ln (u+2) + \ln y^2 = \ln c^2$$

أو

$$\frac{u y^2}{u+2} = c^2$$

وبالتعويض عن المتغير u نحصل على الناتج النهائي

$$xy^2 = c^2(x+2y)$$

تمارين

فيما يلي أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $(x-2y)\,dx + (2x+y)\,dy = 0$

(2) $xy\,dx - \left(x^2 + 3y^2\right) dy = 0$

(3) $x\,dx + (y-2x)\,dy = 0$

(4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-x}{y+x}$

(5) $x^2 y' = 3x^2 - 2xy + y^2$

(6) $(x^2 + y^2)\,dx - xy\,dy = 0$

(7) $(5v-u)\,du + (3v-7u)\,dv = 0$

(8) $y' = y\,x^{-1} + x\,y^{-1}$

(9) $y' = \dfrac{y}{x} \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$

(10) $2x^2 y\,dx = \left(3x^3 + y^3\right) dy$

(11) $(x-y)(4x+y)\,dx + x(5x-y)\,dy = 0$

(12) $(x+\sqrt{xy}\ )\,dy - y\,dx = 0$

(13) $xy\,dx - (x+2y\,)^2\,dy = 0$

(14) $(x - y\ln y + y\ln x\,)\,dx + x\,(\ln y - \ln x)\,dy = 0$

(15) $y^2\,dy = x\,(x\,dy - y\,dx)\,e^{x/y}$

(16) $(x^4 + y^4)\,dx - 2x^3y\,dy = 0$

(17) $y\,\dfrac{dx}{dy} = x + 4y\,e^{-2x/y}$

فيما يلي أوجد حل المعادلة التفاضلية الخاضعة للشرط الابتدائي المرفق :

(18) $xy^2\,y' = y^3 - x^3; \quad y(1) = 2$

(19) $(x-y)\,dx + (3x+y)\,dy = 0; \ y(2) = -1$

(20) $2x^2\,y' = 3xy + y^2; \quad y(1) = -2$

(21) $y^2\,dx + (x^2 + 3xy + 4y^2)\,dy = 0; \quad y(2) = 1$

(22) $(x + y\,e^{y/x}) - x\,e^{y/x}\,y' = 0; \quad y(1) = 0$

(23) $y\,dx + x\,(\ln x - \ln y - 1)\,dy = 0; \quad y(1) = e$

(24) $y\,(9x - 2y)\,dx - x\,(6x - y)\,dy = 0; \quad y(1) = 1$

(25) $(16x + 5y)\,dx + (3x + y)\,dy = 0; \ y(1) = -3$

٢-٦ المعادلات الخطية

لعل القارىء يدرك الآن أن المعادلات التفاضلية التامة هي غاية في حد ذاتها لسهولة حلها . فإذا ما كانت المعادلة التفاضلية غير تامة ، فلعله من الطبيعي جدا أن نسعى إلى وضع المعادلة في صيغة جديدة لكنها تامة ، وفي ذات الوقت يمكن إيجاد حل لها يتميز بأنه حل للمعادلة الأصلية التي تحت الاعتبار .

ويتم الوصول إلى الصيغة التامة للمعادلة عن طريق ضرب كل حد فيها بما يُسمى بعامل المكاملة ، وهو ذلك المقدار الذى ينتج عن ضربه في كل حد من حدود المعادلة أن تصبح المعادلة تامة .

ولا يمكن تطبيق هذه الطريقة على جميع المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى بصفة عامة ، إلا أن هناك صنفا هاما خاصا من هذه المعادلات يمكن دائما إيجاد عامل مكاملة لها ، وهو صنف المعادلات الخطية من الرتبة الأولى .

تعريف. يقصد بالمعادلة الخطية من الرتبة الأولى (في المتغير التابع) كل معادلة على الصورة

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x) \qquad (1)$$

فكرة الطريقة. قلنا إننا في هذه الطريقة نسعى إلى إيجاد عامل مكاملة يحول المعادلة الخطية إلى معادلة تامة . فلنفترض أن عاملا كهذا قد وُجد ، ولنرمز اليه بالرمز $v(x)$ ، وأن جميع قيمه موجبة . عندها نستنتج أن المعادلة

$$v(x)\left[\frac{dy}{dx} + P(x)\,y\right] = v(x)\,Q(x) \qquad (2)$$

يجب أن تكون تامة . وبإعادة كتابة (2) نحصل على المعادلة

$$\left[v(x)\,P(x)\,y - v(x)\,Q(x)\right]dx + v(x)\,dy = 0 \qquad (3)$$

وبمقارنة (3) بالشكل العام الذى تحدثنا عنه في البند الثالث وهو

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

نجد أن

$$M = v\,P\,y - v\,Q$$
$$N = v$$

مع ملاحظة أن Q, P, v دوالّ في x فقط .

وبناءً عليه فإن كانت المعادلة (3) تامة ، فلا بد أن يكون لدينا

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

وبالتعويض من المعادلتين أعلاه نحصل على

$$v\,P = \frac{dv}{dx}$$

أو

$$P\,dx = \frac{dv}{v}$$

وبمكاملة الطرفين نحصل على

$$\ln v = \int P\,dx \qquad (4)$$

أو

$$v = e^{\int P\,dx} \qquad (5)$$

أي أنه إذا كان للمعادلة (1) عامل مكاملة موجب مستقل عن y فلا بد أن يكون معطى بالمعادلة (5).

ولنتأكد الآن أن v المعطاة بالمعادلة (5) تمثل فعلا عامل مكاملة للمعادلة (1). ولنبدأ بضرب كل حد في (1) في قيمة v لنحصل على المعادلة

$$e^{\int P\,dx}\frac{dy}{dx} + P\ e^{\int P\,dx}\,y = Q\,e^{\int P\,dx} \qquad (6)$$

لاحظ هنا أن الطرف الأيسر من المعادلة (6) ماهو الا مشتقة المقدار

$$y\ e^{\int P\,dx}$$

بالنسبة إلى x بينما الطرف الأيمن دالة في المتغير x فقط . وعليه فإن المعادلة (6) تامة كما هو متوقع . ولوضع العبارة الأخيرة في صيغة رياضية فإننا نكتب

$$\frac{d}{dx}\left[y\ e^{\int P\,dx}\right] = Q\,e^{\int P\,dx}$$

وبمكاملة الطرفين نصل إلى الحل المطلوب y .

ولنلخص الآن طريقة حل المعادلات التفاضلية الخطية .

طريقة حل المعادلات الخطية

(أ) اكتب المعادلة في صيغتها القياسية

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

(ب) أوجد قيمة عامل المكاملة $v(x)$ للمعادلة عن طريق القانون

$$v(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

(ج) اضرب كل حد من حدود المعادلة ذات الصيغة القياسية في $v(x)$ مع ملاحظة أن الطرف الأيسر عبارة عن المقدار $\frac{d}{dx}\left[v(x)\, y\right]$ لنحصل على

$$v(x)\,\frac{dy}{dx} + P(x)\,v(x)\,y = v(x)\,Q(x)$$

أو

$$\frac{d}{dx}\left[v(x)\,y\right] = v(x)\,Q(x)$$

(د) كامل طرفي المعادلة الأخيرة لتحصل على y بالقسمة على $v(x)$.

مثال ١. حل المعادلة

$$(x^4 + 2y)\,dx - x\,dy = 0$$

الحل : (أ) نضع المعادلة في صيغتها القياسية بالقسمة على المقدار $-x\,dx$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}\,y = x^3$$

(ب) نجد عامل المكاملة v

$$v(x) = e^{\int -(2/x)\,dx} = e^{-2\ln|x|}$$
$$= e^{\ln x^{-2}} = \frac{1}{x^2}$$

(ج) نصل الآن إلى المعادلة

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}\,y\right] = \frac{1}{x^2}\,x^3 = x$$

(د) نكامل الطرفين لنحصل على

$$\frac{y}{x^2} = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c_1$$

أو

$$y = \frac{1}{2}\,x^2\,(x^2 + c)$$

مثال ٢. حل المعادلة التفاضلية

$$y\,dx + (3x - xy + 2)\,dy = 0$$

الحل : حيث أنه يوجد لدينا حاصل الضرب $y\,dy$ فالمعادلة ليست خطية في y لكنها خطية في x . وعليه فإننا نعيد ترتيب الحدود لتصبح المعادلة على النحو

$$y\,dx + (3 - y)\,x\,dy = -2dy$$

ومن هنا نصل إلى الصيغة القياسية في x

$$dx + \left(\frac{3}{y} - 1\right) x dy = -2\frac{dy}{y} \qquad (7)$$

أو

$$\frac{dx}{dy} + \left(\frac{3}{y} - 1\right) x = -\frac{2}{y}; \quad y \neq 0$$

ومن ثم نجد أن

$$v(y) = e^{\int p(y)\,dy}$$

$$= e^{\int (3/y - 1)\,dy}$$

$$= e^{3\ln|y| - y} = y^3 e^{-y}$$

ويضرب المعادلة (7) في عامل المكاملة $y^3 e^{-y}$ نحصل على المعادلة التامة

$$y^3 e^{-y} dx + y^2 (3 - y) e^{-y} x\,dy = -2y^2 e^{-y} dy$$

ومنه نحصل على

$$x y^3 e^{-y} = -2 \int e^{-y} y^2\,dy$$

$$= 2y^2 e^{-y} + 4y e^{-y} + 4e^{-y} + c$$

ويمكن كتابة مجموعة الحل ضمنيا على النحو التالي

$$xy^3 = 2y^2 + 4y + 4 + c\,e^{y}$$

مثال ٣. حل مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x \; ; \quad y(0) = -3$$

الحل : نجد أولا عامل المكاملة

$$v(x) = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

ومنه نصل إلى

$$\frac{d}{dx}\left[e^{x^2} y\right] = x\, e^{x^2}$$

أو

$$e^{x^2} y = \int x\, e^{x^2}\, dx = \frac{e^{x^2}}{2} + c$$

وبالتالي نستنتج أن

$$y = \frac{1}{2} + c\, e^{-x^2}$$

بتعويض القيمة الابتدائية نجد أن

$$-3 = \frac{1}{2} + c\, e^{0}$$

ومنه $c = -\frac{7}{2}$. ومن ثم نحصل على الحل الوحيد

$$y = \frac{1}{2}\left(1 - 7e^{-x^2}\right)$$

تمارين

فيما يلي أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $(3xy + 3y - 4)\, dx + (x+1)^2\, dy = 0$

(2) $2y' + 10y = 1$

(3) $y' - y = e^{3x}$

(4) $y' + 3x^2 y = x^2$

(5) $y' = \csc x - y \cot x$

(6) $(x + 4y^2)\, dy + 2y\, dx = 0$

(7) $x\, dy = (x \sin x - y)\, dx$

(8) $(1+ e^x)\, y' + e^x\, y = 0$

(9) $(3x - 1)\, y' = 6y - 10\, (3x - 1)^{1/3}$

(10) $(y - \cos^2 x)\, dx + \cos x\, dy = 0$

(11) $(x + xy)\, dx - (1 + x^2)\, dy = 0$

(12) $xy' + (3x + 1)y = e^{-3x}$

(13) $v\, dx + (2x + 1 - vx)\, dv = 0$

(14) $y' = \dfrac{1 - e^{-2x}}{e^x + e^{-x}} - y$

(15) $y' - 1 = 3y \tan x$

(16) $(1+ \cos x)\, y' = \sin x\, (\sin x + \sin x \cos x - y)$

(17) $(x + 2)^2\, y' = 5 - 8y - 4xy$

(18) $y\, dx + (xy + 2x - y\, e^y)\, dy = 0$

فيما يلي أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية :

(19) $(2x + 3)\, y' = y + (2x + 3)^{1/2}; \quad y(-1) = 0$

(20) $y' = x^3 - 2xy\, ; \quad y(1) = 1$

(21) $2\,(1+ x) + 3t\, \dfrac{dx}{dt} = 0; \quad x(1) = 1$

(22) $x(x - 2)\, y' + 2y = 0; \quad y(3) = 6$

(23) $y' = \dfrac{y}{(y - x)}\, ; \quad y(5) = 2$

(24) $y' = 2\,(2x - y); \quad y(0) = 1$

(25) $(x + 1)\, y' = \ln x - y\, ; \quad y(1) = 10$

(26) $y' + y \tan x = \cos^2 x\, ; \quad y(0) = -1$

(27) $y' = 2(2x - y); \quad y(0) = -1$

(28) $y' = 2y + x\, (e^{3x} - e^{2x}); \quad y(0) = 2$

٢-٧ ملخص الباب

لقد استعرضنا في بداية الباب نظرية وجود الحل ووحدانيته للمعادلة التفاضلية ذات الرتبة الأولى الخاضعة للشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$. ثم تعرضنا بشيء من التفصيل لبعض أنواع المعادلات التفاضلية وطرق حلولها وهي:

(١) المعادلة ذات المتغيرات المنفصلة ، وهي التي يمكن أن توضع في الصورة

$$A(x)\,dx + B(y)\,dy = 0$$

(٢) المعادلة التامة ، وهي المعادلة

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

المتميزة بتحقق الشرط

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

(٣) المعادلة المتجانسة ، وهي المعادلة التي على الصورة

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

والمتميزة بأن كلا من N , M متجانسة ، وبنفس درجة التجانس .

(٤) المعادلة الخطية ، وهي المعادلة التي يمكن وضعها في الصيغة القياسية

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

أو

$$\frac{dx}{dy} + P(y)\,x = Q(y)$$

هذا وقد تم شرح طريقة إيجاد حل كل نوع من هذه المعادلات شرحا رياضيا وافيا مع دعم ذلك بالأمثلة الكافية لايضاح كيفية تطبيق الطريقة .

ومن المتوقع أن يكون لدى الطالب الآن حصيلة كافية من التمارين على كل نوع من هذه المعادلات ، كما أنه من المتوقع أن يكون قد حقق لنفسه الحس الرياضي المناسب الذي يؤهله لتحديد نوع المعادلة من النظرة الأولى ، والشروع في حلها بالتالي . ومن المهم جدا للطالب أن يبني هذه الملكة أو الحس الرياضي خاصة في مادة كهذه حيث ستكون الحصيلة كبيرة في نهاية الفصل الدراسي .

٢-٨ تمارين عامة

فيما يلي أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $y' = \dfrac{e^{x+y}}{y-1}$

(2) $y' = (y-x)^{-1}$

(3) $y' = \dfrac{y^2+y}{x^2+x}$

(4) $(2xy - 3x^2)\,dx + (x^2 - 2y^{-3})\,dy = 0$

(5) $(x+y)\,dx + x\,dy = 0$

(6) $xyy' = 3y^2 + x^2;\quad y(-1) = 2$

(7) $x^3y^2\,dx + x^4y^{-6}\,dy = 0$

(8) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x-t}{x+t}$

(9) $y\,e^{xy}\dfrac{dx}{dy} + x\,e^{xy} = 12\,y^2;\quad y(0) = -1$

(10) $(x^3+y^3)\,dx + y^2(3x-y)\,dy = 0$

(11) $\dfrac{y}{x}\,y' = \dfrac{e^x}{\ln y};\quad y(1) = 1$

(12) $(x-y)\,dx - (x+y)\,dy = 0$

(13) $y' - y\,x^{-1} = x^2 \sin 2x$

(14) $y\,(x^2+y^2)\,dx + x\,(3x^3 - 5y^2)\,dy = 0$

(15) $dx = \cos x\,\cos^2 t\,dt$

(16) $y' = x^3 - 2xy;\quad y(1) = 2$

(17) $(2x^2 - 2xy - y^2)\,dx + xy\,dy = 0$

(18) $2xyy' + y^2 = 2x^2$

(19) $y' = \dfrac{x^2+y^2}{xy};\quad y(1) = -4$

(20) $(1+4xy-4x^2y)\,dx+(x^2-x^3)\,dy=0;\quad y(2)=0$

(21) $(x-\sin^2 t)\,dt+\sin t\;dx=0$

(22) $(x-y)\,dx+(3x+y)\,dy=0;\quad y(2)=-1$

(23) $xy\,(dx-dy)=x^2\,dy+y^2\,dx$

(24) $x\,dt=(3t+x^3-x^2)\,dx;\quad x(1)=-1$

(25) $y'=\sec x-y\,\tan x$

(26) $(1-u^2)\,v'=1-uv-3u^2+2u^4$

(27) $2tx+(t^2-x)\,x'=0;\quad x(-1)=1$

(28) $x\cos y+x^{-1}+\left(\sin y-\dfrac{y}{x^2}+x^{-1}\right)\dfrac{dx}{dy}=0$

(29) $u^2v'=v-(1-u);\quad u(-1)=1$

(30) $y'=y\,\tan x+\cos x;\quad y(0)=1$

(31) $y\,dx=(e^y+2xy-2x)\,dy$

(32) $(u^2-2uv+v^2)du-(u^2-2uv-v^2)\,dv=0$

(33) $y'=\cos x-y\,\sec x;\quad y(0)=1$

(34) $v\,(3x+2v)\,dx-x^2\,dv=0;\quad v(1)=2$

(35) $(2xy\,\cos x^2-2xy+1)dx+(\sin x^2-x^2)\,dy=0$

(36) $(xy^2+y-x)\,dx+x\,(xy+1)\,dy=0$

(٣٧) أوجد حل المعادلة التفاضلية $y'=3x+y$ والذي يمر بالنقطة $(-1,0)$.

(٣٨) أوجد حل المعادلة التفاضلية $y'=3x+y$ والذي يمر بالنقطة $(-1,1)$.

(٣٩) أوجد حل المعادلة التفاضلية $y'=2\,(2x-y)$ والذي يمر بالنقطة $(0,2)$.

(٤٠) أوجد حل المعادلة التفاضلية $\sqrt{1-y^2}\,dx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0$ والذي يمر بالنقطة $(0,\sqrt{3}/2)$.

الباب الثالث

تطبيقات على المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى

■ مقدمة ■ تطبيقات رياضية ■ تطبيقات فيزيائية ■ تطبيقات كيميائية ■ تطبيقات بيولوجية ■ تطبيقات إحصائية ■ ملخص الباب ■ تمارين عامة .

٣-١ مقدمة

تلعب المعادلات التفاضلية دورا هاما ورئيسا في ترجمة الواقع الفعلي لكثير من المشكلات الطبيعية إلى نماذج رياضية محددة المعالم يمكن دراستها من وجهة رياضية بحتة ومن ثم العمل على إيجاد الحلول المناسبة التي تُترجم مرة أخرى إلى عالم الواقع فتعطى صورة واضحة عن ماهية الحلول الممكنة والخيارات المتاحة .

إذا - وكما يتضح من السياق - فالنموذج الرياضي ماهو إلا محاولة دقيقة مدروسة لمحاكاة الواقع الفعلي ووصفه بدقة باستعمال لغة الرياضيات . وهذا هو ما يسعى اليه العلماء والمهندسون وغيرهم ممن تُسند اليهم مهام إيجاد الحلول العملية للمشكلات الواقعية والمعضلات التقنية التي تواجه المجتمع البشري بعد بلوغه هذه الدرجة من التقدم التكنولوجي والعلمي الهائل .

ولعل عملية بناء أو تكوين النموذج الرياضي الفعال تحتاج إلى مهارة وخيال وتقدير موضعي للمشكلة تحت البحث . وبالتأكيد فإن الاحاطة ببعض النماذج القائمة التي توضح الجوانب المختلفة لإنشاء النموذج الرياضي ستؤدي حتما إلى وضوح الصورة إضافة إلى تزويد القارىء ببعض الخبرة والمران والألفة . وهذا ماسنفعله في هذا الباب وفي الباب الحادي عشر أيضا حين نتناول بعض تطبيقات المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الثانية .

أما في هذا الباب فسنتناول - كما هو متوقع - بعض التطبيقات البسيطة للمعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى . وقد يكون من المناسب إرجاء هذا الباب إلى ما بعد الباب التالي ، لكننا آثرنا أن يكون هذا الترتيب حتى لا يطول المقام بالطالب قبل أن يرى بعض التطبيقات العملية للمادة التي بين يديه . ولعل أهم الخطوات التي يجب على صاحب المشكلة اتخاذها ما يلي :

أولا : صياغة المشكلة بحيث يمكن إيجاد حل رياضي لها . وهذا يتطلب فهما جيدا لمجال المشكلة كما يتطلب إلماما بالنظرية الرياضية . وقد يكون من المناسب هنا التحدث مع أصحاب الشأن من غير الرياضيين وقراءة ما كتب في هذا الشأن .

ثانيا : تطوير النموذج الرياضي ، وهذا يتم على مرحلتين . الأولى تحديد أي من المتغيرات مهم وأيها غير مهم أو هامشي ، والثانية تحديد العلاقات التي تربط بين هذه المتغيرات سواءً كانت مستقلة أو تابعة .

ثالثا : إختبار النموذج الذي بين يديك ويتم هذا بمقارنة النموذج ببعض القراءات المعملية أو الفعلية والتي قد تؤيد أو تدحض صلاحية النموذج الذي توصلت اليه . ولعل من المناسب هنا أن تسأل نفسك الأسئلة التالية :

- هل إفتراضاتك معقولة ؟
- هل الأبعاد الفعلية للمتغيرات المفترضة صحيحة ؟
- ألا يوجد تناقض بين المعادلات التي تمثل النموذج ؟ أي هل المعـــادلات الرياضية منسجمة مع بعضها البعض ؟
- هل توجد حلول للمعادلات الموضوعة ؟ وما مدى صعوبة إيجاد هذه الحلول إن كان الجواب بالايجاب ؟
- هل توفر هذه الحلول أجوبة شافية للمعضلة التي بين يديك ؟

وإلى هنا يجدر بنا الانتقال إلى البند التالي في أول جولة لنا مع التطبيقات العملية ، وقد حاولنا تصنيف هذه التطبيقات حتى يسهل على القارىء اختيار ما يشاء مما يلائم رغبته وتخصصه واهتماماته .

٣-٢ تطبيقات رياضية (المسارات المتعامدة)

لنفترض أن لدينا عائلة من المنحنيات التي تمثلها المعادلة $y = F(x,c)$ حيث c وسيط أو ثابت لهذه العائلة . ولنفترض أن هناك عائلة أخرى من المنحنيات $y = G(x,c)$ المتعامدة مع العائلة $y = F(x,c)$. بمعنى أن كل عضو من العائلة الثانية يتعامد مع كل عضو من العائلة الأولى . ومثال ذلك عائلة الدوائر

$$x^2 + y^2 = c$$

والتي تشترك في مركز موحد هو نقطة الأصل ، هذه العائلة تتعامد مع عائلة الخطوط المستقيمة التي تمر بنقطة الأصل . وفي هذه الحالة نقول بأن العائلتين تشكلان مسارات متعامدة مع بعضها البعض . ويطلق على العائلة $y = G(x,c)$ مسمى المسارات المتعامدة للعائلة $y = F(x,c)$.

ولإيجاد معادلة المسارات المتعامدة للعائلة $y = F(x,c)$ نقوم أولا بإيجاد المعادلة التفاضلية للعائلة $y = F(x,c)$ ومن ثم نجد الميل $m = m(x,y)$ عند أي نقطة $P(x,y)$ بمعلومية x و y . وعادة ما نلجأ إلى طريقة التخلص من الثابت الاختياري c باستعمال طريقة الباب الأول (أنظر البند ١-٣). وبذلك يتم التخلص من الوسيط أو الثابت c من صيغة المقدار $m(x,y)$.

وبما أن ميل المسار المتعامد عند أي نقطة يساوي سالب مقلوب الميل ، فإن من الواضح أن المعادلة التفاضلية التي تمثل منحنى المسارات المتعامدة ما هي إلا

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{m(x,\ y)} \qquad (1)$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية (1) يمثل المعادلة المطلوبة $y = G(x,c)$.

مثال ١. أوجد عائلة المنحنيات المتعامدة مع العائلة $y = a\,x^{-2}$.

الحل : باستعمال طريقة التخلص من الثابت كما جاءت في البند ١-٣ نجد أننا نحصل على $dy = -2a\,x^{-3}dx$ ، أو

$$\frac{dy}{dx} = m\ (x,y) = -\ 2a\,x^{-3}$$

وبالتعويض عن a من معادلة العائلة نجد أن

$$m(x,y) = -\ 2y\ x^{-1}$$

وبالتالي فالمعادلة التفاضلية للمسارات المتعامدة هي

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{m(x,y)} = \frac{1}{2y\,x^{-1}} = \frac{x}{2y}$$

أو هي

$$2y\,dy = x\,dx \qquad (2)$$

وبحل المعادلة نستنتج أن العائلة المتعامدة المطلوبة تمثلها المعادلة

$$2y^2 + x^2 = c$$

مثال ٢. أوجد معادلة المسارات المتعامدة للعائلة $y = c\,e^{-2x} + 3x$.

الحل : كما تقدم في المثال السابق نفاضل للتخلص من الوسيط أو الثابت c

$$dy = \left(-2c\,e^{-2x} + 3\right) dx$$

$$= [-2(y - 3x) + 3]\,dx = (6x - 2y + 3)\,dx$$

ومن ثم نجد أن الميل $m = 6x - 2y + 3$. ولذا فإن المعادلة التفاضلية للمسارات المتعامدة تكون على النحو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(6x - 2y + 3)}$$

أو

$$dx + (6x - 2y + 3)\,dy = 0 \qquad (3)$$

وبضرب المعادلة (3) في المقدار e^{-6y} تتحول إلى معادلة تامة (انظر البند ٢-٤) يكون حلها العام على الصورة

$$9x - 3y + 5 = c\,e^{-6y}$$

مثال ٣. اثبت أن العائلة $y = c_1 - \frac{x^4}{4}$ متعامدة مع العائلة $y^2 = c_2 x^4$.

الحل : باستعمال طريقة التخلص من الثابت كما جاءت في البند ١-٣ نجد أنه بالنسبة للعائلة الأولى

$$dy = 4c_1\,x^3\,dx = 4\left(\frac{y}{x^4}\right)x^3 dx = \frac{4y}{x}\,dx$$

ومن ثم فإن ميل المسار يساوي $m_1 = \frac{4y}{x}$. أما بالنسبة للعائلة الثانية ، فإن

$$2y\,dy = -\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

وبالتالي فإن الميل

$$m_2 = -\frac{x}{4y}$$

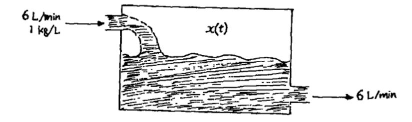
أي أن

$$m_1\, m_2 = -1$$

وهذا يعني تعامد العائلتين كما هو مطلوب .

٣-٣ تطبيقات فيزيائية

مثال ١. لنفترض أن لدينا خزانا يحتوي على ١٠٠٠ لتر من الماء . ولنفترض أن محلولا مشبعا بالملح بدأ يتدفق إلى الخزان بمعدل ثابت يساوي ٦ لتر في الدقيقة ويتم خلطه باستمرار وانتظام داخل الخزان . أما معدل تدفقه من خارج الخزان فيساوي ٦ لتر في الدقيقة أيضا . لو علمنا أن تركيز الملح في المحلول الداخل إلى الخزان هو ١ كجم في اللتر . بعد كم من الوقت سيصل تركيز الملح في الخزان إلى نصف كيلوجرام في اللتر (انظر الشكل ٣-١) ؟



الشكل ٣-١

الخلط بتدفق متساو

الحل : سنطبق هنا ما يُسمى بنظام الوعاء الواحد والذي يتكون أساسا من معرفة :

١- دالّة $x(t)$ تمثل كمية المادة في الوعاء في اللحظة t .

٢- معدل دخول المادة إلى الوعاء .

٣- معدل خروج المادة من الوعاء .

وحيث أن تفاضل x بالنسبة للمتغير t يمكن تفسيره على أنه معدل التغير في كمية المادة بالنسبة للوقت ، فإن المعادلة التفاضلية المقترحة لنظام الوعاء الواحد هي

$$\text{معدل التغير في } x = \frac{dx}{dt} = \text{معدل الدخول} - \text{معدل الخروج} \qquad (1)$$

وهذا هو النموذج الرياضي لهذه العملية .

ولإيجاد حل للمشكلة التي بين أيدينا نطبق المعادلة (1) لتطابق الوضع القائم مع نظام الوعاء الواحد . فلو رمزنا بـ $x(t)$ لكمية الملح الموجودة في الخزان في اللحظة t ، لأمكننا تحديد تركيز الملح في الخزان عن طريق قسمة $x(t)$ على حجم السائل في الخزان في اللحظة t . ولكن يجب علينا أن نحدد أيضا معدل دخول الملح في الخزان . وحيث أن معدل دخول المحلول إلى الخزان هو ٦ لتر في الدقيقة وبما أن تركيز الملح في هذا المحلول هو ١ كجم في اللتر ، فإننا نستنتج أن معدل دخول الملح هو

$$(\text{٦ لتر/ دقيقة}) \times (\text{١ كجم/ لتر}) = \text{٦ كجم/ دقيقة} \qquad (2)$$

ويتبقى علينا إيجاد معدل خروج الملح من الخزان . وحيث أنه يتم خلط المحلول في الخزان باستمرار وانتظام ، فإنه بإمكاننا افتراض أن تركيز الملح في الخزان منتظم، أي أن تركيز الملح في أي جزء من الخزان في اللحظة t يساوي $x(t)$ مقسوما على حجم السائل في الخزان . وحيث أن الخزان كان يحتوي أصلا على ١٠٠٠ لتر ، وبما أن معدل التدفق إلى داخل الخزان يساوي معدل التدفق من خارج الخزان، فإن الحجم سيظل ثابتا عند ١٠٠٠ لتر . وبالتالي فمعدل خروج الملح

$$(\text{٦ لتر/دقيقة}) \, (x(t) \div \text{١٠٠٠ كجم/لتر}) = 3x \div \text{٥٠٠ كجم/دقيقة} \qquad (3)$$

وبما أن الخزان كان يحتوي فقط على الماء في البداية ، فإن $x(0) = 0$. وبالتعويض عن المعدلات من المعادلتين (2) , (3) في المعادلة (1) نحصل على المعادلة التفاضلية

$$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{3x}{500}; \quad x(0) = 0. \qquad (4)$$

وهي معادلة خطية ذات متغيرات منفصلة . وباكمال الحل واستيفاء الشرط الابتدائي نحصل على المعادلة

$$x(t) = 1000\,(1 - e^{-3t/500}) \qquad (5)$$

ولذا فتركيز الملح في الخزان عند اللحظة t يساوي

$$0.001\ x(t) = (1 - e^{-3t/500})\ \text{Kg/L} \qquad (6)$$

ولإيجاد الوقت المستغرق لبلوغ تركيز الملح ٠.٥ كجم/لتر، يجب أن نساوي الطرف الايمن من (6) بنصف ، ومن ثم نحل المعادلة لإيجاد قيمة t :

$$1 - e^{-3t/500} = \frac{1}{2}$$

أو

$$e^{-3t/500} = \frac{1}{2}$$

ومنه

$$\frac{-3t}{500} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

أو

$$t = \frac{500 \ln 2}{3} \approx 115.5 \text{ min.}$$

أي أن تركيز الملح في الخزان سيصبح نصف كجم/لتر بعد ١١٥ دقيقة ونصف تقريبا.

مثال ٢ (قانون نيوتن للتبريد) . لقد اثبتت التجربة أنه تحت ظروف معينة فإنه يمكن إيجاد تقريب جيد لحرارة جسم ما باستعمال قانون نيوتن للتبريد الذي ينص على : أن حرارة الجسم تتغير بمعدل يتناسب مع الفرق بين حرارة الجسم نفسه وحرارة الجو الخارجي المحيط بالجسم .

لنفترض أن لدينا مقياس حرارة كانت قراءته ٣١ درجة مئوية داخل البيت ، ثم أخرجنا المقياس إلى خارج البيت حيث درجة حرارة الجو تساوي ٥ درجات تحت

الصفر . وبعد مرور ثلاث دقائق وُجد أن قراءة المقياس انخفضت إلى ٧ درجات مئوية . المطلوب إيجاد معادلة تمكننا من التنبؤ بقراءة المقياس في أي لحظة لاحقة .

الحل : لتكن الدّالة T ممثلة لدرجة حرارة المقياس عند اللحظة t باعتبار أن t هو الزمن المستغرق بعد إخراج المقياس إلى الخارج مباشرة . وبذلك يكون من معطيات المسألة أنه عندما تكون $t = 0$ ، فإن $T = 31^\circ$ ، وعندما $t = 3$ تكون $T = 7^\circ$.

وطبقا لقانون نيوتن للتبريد فإن معدل التغير في T وهو $\frac{dT}{dt}$ يتناسب مع الفرق $T - (-5) = T + 5$. وبما أن درجة حرارة المقياس في طريقها للانخفاض فيبدو من المناسب أن نختار $-k$ كمعامل التناسب . أي أننا نسعى إلى إيجاد قيمة T على ضوء المعادلة التفاضلية

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T + 5); \quad T(0) = 31,\ T(3) = 7 \qquad (7)$$

وكان لا بد من توفر القراءة في وقتين مختلفين لحاجتنا إلى إيجاد قيمتي ثابتين مختلفين أحدهما معامل التناسب والآخر الثابت الناتج عن تكامل المعادلة (7) .

ومن المعادلة (7) نحصل مباشرة على القانون

$$T = c\,e^{-kt} - 5$$

وباستعمال الشرط الابتدائي $T(0) = 31$ نحصل على $31 = c - 5$ أو $c = 36$ أو

$$T = 36e^{-kt} - 5$$

ولإيجاد k نستعمل الشرط الابتدائي $T(3) = 7$ لنحصل على

$$7 = 36e^{-3k} - 5$$

ومنه

$$12 = 36e^{-3k}$$

أو $e^{-3k} = \frac{1}{3}$ ، وبالتالي $k = \frac{1}{3}\ln 3$. وبذلك تُعطى الحرارة T في أي وقت لاحق طبقا للمعادلة

$$T = 36\,e^{-(t/3)\ln 3} - 5 \qquad (8)$$

وهذا هو المطلوب .

٣-٤ تطبيقات كيميائية

مثال ١. من المعلوم أنه في بعض الحالات عندما يتم تحويل عنصر ما ، وليكن أ إلى عنصر آخر ب ، فإن المعدل الزمني اللازم لتحويل كمية قدرها x من العنصر أ يتناسب طرديا مع الكمية x نفسها التي لم يتم تحويلها بعد .

وليكن معلوما لدينا كمية المادة غير المحولة في لحظة معينة ، أي لتكن $x = x_0$ عند اللحظة $t = 0$ ، بمعنى أن كامل كمية العنصر أ هو x_0 . عندها يتم تحديد قيمة x (كمية المادة المتبقية التي لم تتحول بعد) عند أي لحظة لاحقة $t > 0$ بواسطة المعادلة التفاضلية

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

إضافة إلى الشرط الابتدائي $x(0) = x_0$. وحيث أن الكمية x تتناقص بمرور الوقت ، فإن ثابت التناسب في المعادلة (1) يجب أن يكون سالبا $(-k)$. وبمكاملة الطرفين في المعادلة (1) ينتج لدينا

$$x = c e^{-kt}$$

ولإن $x(0) = x_0$ ، فإن $c = x_0$. وبالتالي نحصل على

$$x = x_0 e^{-kt} \qquad (2)$$

وهنا نحتاج إلى شرط آخر حتى يمكن إيجاد قيمة k ، لذا لنفترض أنه بعد مرور ٤٥ ثانية يكون قد تم تحول نصف كمية العنصر أ ، أي أن

$$x(45) = \frac{x_0}{2}$$

وبالتعويض في المعادلة (2) نجد أن

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-45k}$$

أو

$$k = \frac{\ln 2}{45}$$

ولذلك عند حساب t بالثواني ، فإن كمية المادة المتبقية عند اللحظة t تُعطى

بالمعادلة

$$x = x_0 e^{-(t/45)\ln 2}$$

ولو أردنا حساب الكمية المتبقية بعد مرور دقيقة ونصف لوجدنا أنها تساوي

$$x = x_0 e^{-(90/45)\ln 2} = \frac{x_0}{4}$$

مثال ٢. في أغلب التفاعلات الكيميائية ، يتفاعل عنصران أ ، ب لتكوين عنصر آخر ج ، وقد وُجد أن معدل تكون ج يختلف باختلاف الكميات المتوفرة في أ ، ب في لحظة تفاعلهما . ولنفترض في مثالنا هذا أن التفاعل المثالي يحتاج ٢ كجم من أ مقابل كل واحد كجم من ب . السؤال هو : لو كان عندنا ١٠ كجم من أ و ٢٠ كجم من ب في البداية ، أي عند اللحظة $t = 0$. ولو تكون لدينا فقط ٦ كجم من ج بعد مرور ٢٠ دقيقة . أوجد كمية ج في أي لحظة t .

الحل : لتكن x هي كمية ج المتكونه بعد مرور t من الساعات . وعندها يكون $\frac{dx}{dt}$ هو معدل التكون . ولكي نحصل على x كجم من ج ، فإننا نحتاج $(2x/3)$ كجم من أ و $(x/3)$ كجم من ب كما هو مُعطى في المثال . وبذلك تكون كمية أ المتوافرة في اللحظة t الموافقة للحظة تكون x كجم من ج هي بالضبط $[10-(2x/3)]$ بينما تساوي كمية ب في ذات الوقت المقدار $20-(x/3)$. وبذلك تنشأ لدينا المعادلة

$$\frac{dx}{dt} = k^*\left(10-\frac{2x}{3}\right)\left(20-\frac{x}{3}\right) \qquad (3)$$

حيث k^* ثابت التناسب . ويمكن إعادة كتابة (3) على النحو

$$\frac{dx}{dt} = k\ (15-x)(60-x) \qquad (4)$$

حيث $k = \frac{k^*}{9}$. الآن نضيف الشرطين المذكورين في المثال وهما $x(0)=0$ ، $x\left(\frac{1}{3}\right)=6$. وبفصل المتغيرات في (4) ثم إجراء التكامل نصل إلى المعادلة

$$\int \frac{dx}{(15-x)(60-x)} = \int k\,dt = kt + c_1$$

أو

$$\frac{1}{45}\int \left(\frac{1}{15-x} - \frac{1}{60-x}\right)dx = \frac{1}{45}\ln\left(\frac{60-x}{15-x}\right) = kt + c_1$$

أو

$$\frac{60-x}{15-x} = c\,e^{45kt}$$

وبتطبيق الشرط الأول $x(0) = 0$ نجد أن $c = 4$ أو

$$\frac{60-x}{15-x} = 4e^{45kt}$$

ثم نطبق الشرط الثاني $x\left(\frac{1}{3}\right) = 6$ لنصل إلى الجواب النهائي

$$x = 15\,\frac{\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{3t}\right]}{\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{3t}\right]}$$

ومن الملاحظ أنه كلما تزايد الوقت إلى ما لانهاية ، اقتربت قيمة x من 15 كما هو متوقع .

٣-٥ تطبيقات بيولوجية

من المشكلات الرئيسية في علم الأحياء تلك المرتبطة بالنمو ، سواءً كان ذلك النمو مرتبطا بخلية أو عضو معين ، أو إنسان أو نبات أو عدد السكان . وقد يبدو لأول وهلة أن المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dt} = k\,y$$

والتي لها الحل العام

$$y = c\,e^{kt} \qquad (1)$$

هي المعادلة المثلى التي تصف النمو عندما $k > 0$ أو التحلل عندما $k < 0$ (انظر مثال ١ في البند السابق) حيث c ثابت اختياري .

لكن من الواضح أن للمعادلة (1) قصورا ينافي طبيعة نمو الأشياء في بعض الأحيان ، ذلك أن y تزداد إلى ما لانهاية عندما تتجه t إلى ما لانهاية . ونحن نعلم أن النمو لا بد أن يتوقف بعد مرور بعض الوقت . والسؤال الآن : هل من الممكن تطوير المعادلة (1) لتتفق مع طبيعة الحقائق البيولوجية من حيث النمو والتحلل؟ هذا هو موضوع مثالنا التالي .

مثال ١ . وحتى تكون الصورة أكثر وضوحا لنفترض أن y تمثل طول قامة إنسان (وإن كان كما أسلفنا يمكن لها أن تمثل حجم خلية أو امتداد شجرة أو أي شئ آخر مشابه) . وحيث أن قامة الإنسان تظل ثابتة بعد مرور فترة من الزمن فلا شك أن المعادلة (1) غير صالحة لاعطاء النموذج الرياضي الملائم لهذا النمو الطبيعي لقامة الإنسان . وبصفة عامة يجب أن يكون لدينا

$$\frac{dy}{dt} = F(y); \quad y(0) = y_0 \qquad (2)$$

حيث y_0 تمثل طول قامة الإنسان عند وقت محدد $t = 0$ ، وليكن عند مولده مثلا أو بعد مرور سنة على مولده . وبما أن إقتراح أن تكون F خطية في y ، أي $F(y) = \alpha y$ سيؤدي إلى المعادلة (1) غير الملائمة ، فإننا مدعوون إلى التحرك خطوة أخرى إلى الأمام عن طريق اقتراح أن تكون $F(y) = \alpha y - \beta y^2$ حيث β موجبة وذلك لإيقاف النمو بعد فترة من الزمن . وبذلك تصبح المعادلة (2) على النحو

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y - \beta y^2; \quad y(0) = y_0 \qquad (3)$$

وهو النموذج الرياضي المقترح لملائمة طبيعة النمو ألبيولوجي التي نحن بصددها.

وبما أن المعادلة (3) ذات متغيرات منفصلة ، فإنه من السهل حلها ثم بإستعمال الشرط الابتدائي $y(0) = y_0$ نصل إلى الحل النهائي

$$y = \frac{(\alpha/\beta)}{\left[1+\left(\frac{\alpha/\beta}{y_0}-1\right)e^{-\alpha t}\right]} \qquad (4)$$

ولو تركنا t تتزايد إلى ما لانهاية في المعادلة (4) لوجدنا أن أكبر قيمة ممكنة للتابع y هي

$$y_{\max} = \lim_{t\to\infty} y = \frac{\alpha}{\beta}$$

وهو ما يناسب الطبيعة البيولوجية لنمو قامة الإنسان . هذا ويمكن تحديد قيمة α/β بالاستعانة ببعض البيانات عن طول قامة شخص ما في فترتين مختلفتين ، ولتكن $y(t_1)=y_1$ ، $y(t_2)=y_2$. وبالتعويض في (4) نجد أن

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{y_1^2 - y_0 y_2}{y_1(y_0 y_1 - 2y_0 y_2 + y_1 y_2)} \qquad (5)$$

وبذلك يمكن إيجاد قيمة y في أي وقت لاحق . أما القيمة القصوى $y_{\max}$ فستصبح

$$y_{\max} = \lim_{t\to\infty} y = \frac{y_1(y_0 y_1 - 2y_0 y_2 + y_1 y_2)}{y_1^2 - y_0 y_2} \qquad (6)$$

٦-٣ تطبيقات إحصائية

لعل من أهم التطبيقات الاحصائية تلك المتعلقة بزيادة عدد السكان مع مرور الوقت أو ما يسمى باحصائيات زيادة عدد السكان . ومن الطريف أن العلاقة التي تربط هذا النمو بالزمن هي نفسها العلاقة المعطاة بالقانون (4) في البند السابق. وحيث أن وجود الاحصائيات الرسمية مهم جدا لتحديد قيمة النسبة α/β فقد اضطررنا لضرب مثال من الغرب ، ومستمد من أحد المراجع الأجنبية .

مثال ١. باستعمال الجدول أدناه حدد

أ – الحد الأقصى لعدد سكان الولايات المتحدة من الناحية النظرية .

ب – عدد السكان المتوقع في العام الميلادي ١٩٩٠م .

العام الميلادى	عدد السكان بالملايين
١٩٠٠	٠٠ر٧٦
١٩١٠	٠٠ر٩٢
١٩٢٠	٧٠ر١٠٥
١٩٣٠	٨٠ر١٢٢
١٩٤٠	٧٠ر١٣١
١٩٥١	١ر١٥١
١٩٦٠	٣٠ر ١٧٩

جدول ٣-١

تعداد سكان الولايات المتحدة

الحل : بالرجوع إلى المعادلة (4)لتحديد قيمة α/β فإننا سنفترض الشروط الابتدائية التالية

$$t_0 = 0\ ,\ t_1 = 1\ ,\ t_2 = 2$$
$$y_0 = 76.0\ ,\ y_1 = 122.8\ ,\ y_3 = 179.3$$

وبذلك نكون قد راعينا معدلات النمو في السنوات المعطاة حيث t_0 مرتبطة بالعام ١٩٠٠م بينما t_1 مرتبطة بالعام ١٩٣٠م ، و t_2 مرتبطة بالعام ١٩٦٠م .

أ – بالتعويض بهذه القيم أعلاه في المعادلة (6) نحصل على جواب الفقرة الأولى وهو $y_{max} = 346.3$. أي أنه من الناحية النظرية فلن يتجاوز عدد سكان الولايات المتحدة ٣ر٣٤٦ مليون نسمة مهما امتد الزمان .

ب – لتحديد عدد سكان الولايات المتحدة في العام ١٩٩٠ نعوض في المعادلة (4) بالقيمة $t = 3$ بعد إيجاد α/β من المعادلة (5) فنحصل على $y \approx 234.5$ ، أي أن عدد سكان الولايات المتحدة المتوقع في عام ١٩٩٠م هو ٥ر٢٣٤ ميلون نسمة .

٣-٧ ملخص الباب

كما أشرنا في مقدمة الباب ، فإن هناك الكثير من التطبيقات العملية للمعادلات التفاضلية في حياتنا الواقعية ، وأن هذه التطبيقات تشمل فروعا كثيرة من فروع العلم .

وقد أعطينا عدة أمثلة شملت مجالات تطبيقية مختلفة كان الهدف منها اعطاء القارىء نبذة مختصرة على سبيل المثال لا الحصر . فالأمثلة كثيرة ، وعلى الراغب في الاستزادة الرجوع إلى المراجع المختلفة في هذ ا المجال (انظر مثلا Nagle and Saff) . وسنكتفي في هذا الباب بهذه الأمثلة التي أشرنا اليها إضافة إلى التمارين العامة التالية .

٣-٨ تمارين عامة

١ – إذا علمنا أن مادة الراديوم تتحلل إلى مكوناتها الرئيسية بمعدل يتناسب مع الكمية التي نبدأ بها . ولنفترض أن لدينا الكمية W وأنه بعد مرور ٢٥ سنة تحلل منها ١ر١ في المائة تقريبا . أوجد بالتقريب عدد السنوات المطلوبة كي تتحلل نصف الكمية . الجواب : ١٦٠٠ سنة

٢ – لو علمنا أن لدينا مادة مشعة يتلاشى نصف مقدارها بعد ٣٨ ساعة . بعد كم من الوقت يتلاشى ٩٠ في المائة من هذه المادة المشعة ؟

الجواب : ١٢٦ ساعة

٣ – في تمام الساعة التاسعة صباحا ، أخذنا مقياس حرارة كانت قراءته داخل البيت ٢٥ درجة مئوية إلى خارج البيت حيث الحرارة صفر مئوي . وفي الساعة التاسعة وخمس دقائق كانت القراءة ١٥ درجة مئوية . أما في الساعة التاسعة وعشر دقائق فقد أعيد إدخال المقياس إلى البيت حيث الحرارة ثابتة عند ٢٥ درجة . المطلوب :

أ – إيجاد قراءة المقياس عند الساعة التاسعة وعشرين دقيقة .

ب – الوقت الذي ستعود فيه قراءة المقياس إلى ٢٥ درجة مئوية تقريبا .

٤ – في يوم قائظ شديد الحرارة ، وعند الظهر تماما كانت قراءة مقياس الحرارة ٢٥ درجة مئوية داخل المنزل ، ثم اخرج المقياس مباشرة إلى خارج البيت حيث الحرارة ٤٥ درجة مئوية . وبعد ثلاثة دقائق من تعرض المقياس لحرارة الجو الخارجي كانت قراءته ٣٥ درجة مئوية . وبعد برهة من الزمن أعيد المقياس إلى داخل المنزل حيث حرارة الجو ٢٥ درجة مئوية . وفي الساعة ١٢٫١٠ كانت قراءة المقياس ٣٠ درجة مئوية . فمتى تم ادخال مقياس الحرارة إلى داخل البيت مرة أخرى ؟

٥ – لنفترض أن تفاعلا كيميائيا جرى حسب قانون التفاعل المعطى بالمعادلة (2) البند ٣-٣ . إذا كان نصف العنصر أ تم تحويله بعد مرو ١٠ ثوان . كم من الزمن نحتاج حتى يتحول تسعة أشعار العنصر أ ؟ الجواب : ٣٣ ثانية

٦ – لنفترض أن لدينا عنصرا أ يتناسب المعدل الزمني لتحوله مع مربع الكمية x التي لم تتحول بعد . وليكن k هو ثابت التناسب ، ولتكن x_0 كمية المادة التي لم تتحول بعد عند اللحظة $t = 0$. أوجد قيمة x عند أي لحظة لاحقة .

الجواب : $x = \dfrac{x_0}{1 + x_0 k t}$

٧ – لدينا سكن طلابي به ١٠٠ طالب كل منهم قابل للاصابة بفيروس معين . إذا كان لدينا نموذجا رياضيا بسيطا يفترض أنه خلال فترة الوباء بهذا الفيروس فإن معدل تغير عدد الطلبة المصابين بالنسبة للزمن يتناسب مع عدد الطلبة المصابين ، وليكن I وكذلك يتناسب مع عدد الطلبة غير المصابين $(100 - I)$. المطلوب :

أولا : إذا كان هناك طالب واحد مصاب عند البداية أي عند اللحظة $t = 0$. اثبت أن عدد الطلبة المصابين في أي لحظة لاحقة t هو

$$I = \frac{100\, e^{100kt}}{(99 + e^{100kt})}$$

ثانيا: إذا كان ثابت التناسب k يساوي 0.01 عندما تقاس t بعدد الأيام ، أوجد معدل عدد الاصابات الجديدة $I'(t)$ في نهاية كل يوم طيلة فترة الأيام التسعة الأولى.

الجواب : 1 ; 3 , 8 , 16 , 24 , 23 , 14 , 6 , 3

الباب الرابع

المزيد عن حل المعادلات ذات الرتبة الأولى

■ مقدمة ■ تخمين عامل المكاملة ■ إيجاد عامل المكاملة ■ الإحلال ■ معادلة برنولي ■ المعاملات الخطية ذات المتغيرين ■ ملخص الباب ■ تمارين عامة .

٤-١ مقدمة

في الباب الثاني استعرضنا بشيء من التفصيل بعض الطرق المختلفة لحل معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ، ووجدنا أن ما يصلح تطبيقه من الطرق على معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى قد لا يجدى تطبيقه على معادلة أخرى من نفس الرتبة .

وهناك معادلات أخرى من الرتبة الأولى لا تجدي معها طرق الباب الثاني جميعها . ولهذا فإننا في هذا الباب سنتناول بشئ من التفصيل المزيد من الطرق الجديدة لمعالجة المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى .

٤-٢ تخمين عامل المكاملة

في البند ٢-٦ وجدنا أن أي معادلة خطية من الرتبة الأولى يمكن إيجاد حل لها عن طريق إيجاد عامل المكاملة المناسب . هذا وسيتناول البند التالي (بند ٤-٣) طريقة الاختيار الملائمة لتحديد عامل المكاملة بطريقة رياضية بعيدة عن التخمين في حالة استيفاء المعادلة لشروط محددة .

أما في هذا البند فسنرى أنه يمكننا أحيانا أن نجد عامل المكاملة لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى عن طريق التخمين والتخمين فقط . وربما كان هذا عائدا بالدرجة الأولى إلى بساطة المعادلة أو بساطة الصيغة التي كتبت بها المعادلة ، الا أنها تحتاج بلا أدنى ريب إلى كثير من الخبرة والمران ، وعادة ما يتم اللجوء إلى هذه الطريقة عندما يلاحظ أحدنا بعض الحقائق المعينة عن المعادلة .

ولأن التخمين هو عنوان هذا البند ، فسنبدأ بمثال يوضح الفكرة وينير لنا الطريق .

مثال ١. حل المعادلة التفاضلية

$$\left(x^2+y^2+y\right)dx - x\,dy = 0$$

الحل : يبدو أن جميع الطرق السابقة ستفشل في حل هذه المعادلة ، ولكن لو أعدنا كتابة المعادلة على الشكل التالي

$$(x^2+y^2)\,dx + y\,dx - x\,dy = 0$$

ثم لاحظنا بطريقة أو أخرى أنه يمكن إعادة كتابتها مرة أخرى على الشكل التالي

$$dx + \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = 0$$

أو

$$dx - d\left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right] = 0$$

لحصلنا مباشرة بالتكامل على الحل

$$x - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = c$$

وهنا سنلاحظ أن عامل المكاملة كان بلا شك $(x^2+y^2)^{-1}$ ، فقد أدى ضرب المعادلة به إلى تحويلها إلى معادلة ذات متغيرين منفصلين هما x والآخر بالطبع $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$.

ولعل من المناسب أن نذكر هنا بعض التفاضلات التامة التي عادة ما تستعمل في حل المعادلات ذات الرتبة الأولى عن طريق التخمين :

$$d(xy) = x\,dy + y\,dx \qquad (1)$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} \qquad (2)$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2} \qquad (3)$$

$$d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (4)$$

$$d\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)=\frac{x\,dx-y\,dy}{\sqrt{x^2-y^2}} \qquad (5)$$

$$d\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right)=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2} \qquad (6)$$

$$d\left[\ln(x^2+y^2)\right]=\frac{2(x\,dx+y\,dy)}{x^2+y^2} \qquad (7)$$

مثال ٢. حل المعادلة التالية عن طريق إيجاد عامل المكاملة بالتخمين

$$y\,dx-(x-y^3)\,dy=0$$

الحل : نعيد كتابة المعادلة على النحو التالي

$$y\,dx-x\,dy+y^3dy=0$$

بالقسمة على y^2 (عامل المكاملة) نحصل على

$$y^{-2}(y\,dx-x\,dy)+y\,dy=0$$

باستعمال (3) يتبين لنا أن المعادلة عبارة عن

$$d\left(\frac{x}{y}\right)+y\,dy=0$$

وبمكاملة الطرفين نحصل على

$$\frac{x}{y}+\frac{y^2}{2}=c_1$$

أو

$$y^3+2x=cy$$

مثال ٣. حل المعادلة

$$x\,dy+(y+x^2y^3)\,dx=0$$

الحل : نبدأ بجمع الحدود التي من نفس الدرجة لنحصل على المعادلة

$$x\,dy + y\,dx + x^2y^3\,dx = 0$$

ثم نعيد كتابتها على النحو

$$d(xy) + x^2y^3\,dx = 0$$

وحيث أن المعادلة تحتوي على مشتق xy ، فإن أي معامل يعتمد على دالّة في xy لن يؤثر على تكامل الحد المحتوي على مشتق xy ، لكن الحد الآخر يحتوي على التفاضلة dx ، ولهذا يجب أن يحتوي على دالة في x فقط .ولذا نقسم على $(xy)^3$ لنتخلص من y ونحصل على

$$\frac{d(xy)}{(xy)^3} + \frac{dx}{x} = 0$$

وهذه المعادلة قابلة للتكامل في هذا الوضع . وعليه فإن مجموعة الحل هي

$$-\frac{1}{2}(xy)^{-2} + \ln|x| = -\ln|c|$$

أو

$$2x^2y^2\ln|cx| = 1$$

تمارين

أوجد حلول المعادلات التالية بطريقة التخمين أو بأي طريقة أخرى :

(1) $y(2xy+1)\,dx - x\,dy = 0$

(2) $y(x^3+y)\,dx + x(x^3-y)\,dy = 0$

(3) $y\,dx + (2x^3y - x)\,dy = 0$

(4) $2v\,du + u(2+u^2v)\,dv = 0$

(5) $x(x^2+1)\,dy + y(x^2-1)\,dx = 0$

(6) $(x^3+y)\,dx + (x^2y - x)\,dy = 0$

(7) $v(u^3e^{uv} - v)\,du + u(v + u^3e^{uv})\,dv = 0$

(8) $y(x^2-y^2+1)\,dx - x(x^2-y^2-1)\,dy = 0$

(9) $y^2(1-x^2)\,dx + x(x^2y+2x+y)\,dy = 0$

(10) $(x^2y+y^3-x)\,dx + (x^3+xy^2-y)\,dy = 0$

(11) $u(u^2v^2-1)\,dv + v(u^2v^2+21)\,du = 0$

(12) $\left(x-\sqrt{x^2+y^2}\right)dx + \left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)dy = 0$

(13) $x^4y' = -x^3y - \csc xy$

(14) $(x-x^2-y^2)\,dx + (y+y^2+x^2)\,dy = 0$

(15) $[v\tan uv + 1]\,du + u\tan uv\,dv = 0$

(16) $\left(y-x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx = \left(y\sqrt{x^2+y^2}-x\right)dy$

تلميح : ربما كان من الأفضل أن تثبت أولا أن

$$\sqrt{x^2+y^2}\,(x\,dx+y\,dy) = \frac{1}{3}\,d\left[(x^2+y^2)^{3/2}\right]$$

(17) $y(y^2-2x)\,dx + x(y^2+x)\,dy = 0;\quad y(2)=1$

(18) $y^3(x^3y-2)\,dx + x(x^3y^3+2y^2-x)\,dy = 0;\quad y(1)=1$

(19) $(x^3-xy^2+y)\,dx + (y^3-x^2y-x)\,dy = 0$

تلميح : اثبت أن
$$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2-y^2} = \frac{1}{2}\,d\left[\ln\left|\frac{(x-y)}{(x+y)}\right|\right]$$

(20) $2(x^4-y)\,dx + x\,dy = 0;\quad y(1)=0$

(21) $2x^5y' = y(3x^4+y^2);\quad y(-1)=2$

(22) $2x^5y' = y(3x^4+y^2)$

(23) $(x^3+2xy^2-x)\,dx + (x^2y+2y^3-2y)\,dy = 0$

(24) $y' = \dfrac{x^3+2y}{x(x^2+1)}$

(25) $(xy^2+x\sin^2x-\sin 2x)\,dx - 2y\,dy = 0$

٤-٣ إيجاد عامل المكاملة

لنفترض أنه طُلب منا أن نجد حلاً للمعادلة التفاضلية

$$M\,dx + N\,dy = 0 \qquad (1)$$

ولنفترض أن سائر الطرق السابقة لم تجدي لإيجاد الحل المطلوب فما هو الحل ياترى؟

لقد وجدنا في البند السابق أنه يمكن أحيانا تحويل معادلة غير تامة إلى معادلة تامة ذات متغيرات منفصلة يمكن مكاملتها بسهولة لإيجاد الحل . وقلنا إن تلك الطريقة تحتاج إلى خبرة ومران وصيغة معينة للمعادلة يمكن من خلالها إعادة ترتيب الحدود وإجراء عملية القسمة أو الضرب المناسبة مع إدراك أن الحدود الناتجة هي عبارة عن مشتقات لمقادير معينة في متغير أو أكثر ، وقد أطلقنا على هذه الطريقة " طريقة التخمين " .

أما في الحالة العامة ، أي تلك التي لا تتوافر فيها الشروط اللازمة لتخمين عامل المكاملة فيجدر بنا أن نسلك طريقا آخر اكثر دقة يكون خاضعا لخطوات رياضية محددة لا دخل لعامل الخبرة فيها بالقدر الذى نحتاجه في البند السابق .

ولنرى كيف يمكننا أن نستخلص هذه الخطوات الضرورية لإيجاد عامل المكاملة ، ومن ثم إيجاد الحل المطلوب . ولنبدأ بافتراض أن الدالة u (المحتمل كونها في كلا المتغيرين x و y) هي التي تلعب دور عامل المكاملة للمعادلة (1) فتحيلها إلى معادلة تامة هي

$$u\,M\,dx + u\,N\,dy = 0 \qquad (2)$$

وبتطبيق نتائج البند ٢-٤ لا بد أن يكون لدينا

$$\frac{\partial}{\partial y}(u\,M) = \frac{\partial}{\partial x}(u\,N)$$

أي أن على u أن تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية التالية

$$u\,\frac{\partial M}{\partial y} + M\,\frac{\partial u}{\partial y} = u\,\frac{\partial N}{\partial x} + N\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

أو

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\,\frac{\partial u}{\partial x} - M\,\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (3)$$

وبالمقابل ، لو عكسنا اتجاه الخطوات أعلاه ، لوجدنا أن تحقيق u للمعادلة (3) يجعل من u عامل مكاملة للمعادلة (1). وبذلك نكون قد قصرنا حل المعادلة التفاضلية العادية (1)على إيجاد حل معين للمعادلة التفاضلية الجزئية (3) .

ولكننا لم نتناول في السابق حلول المعادلات التفاضلية الجزئية اطلاقا . إذا ما الهدف الذى نسعى اليه من وراء الإنتهاء إلى المعادلة (3) وكيف يمكن الافادة منها لإيجاد حل للمعادلة (1) ؟

ويتضح لنا الهدف وتتبين لنا الفائدة إذا عدنا مرة أخرى إلى نطاق المعادلات التفاضلية العادية عن طريق اشتراط أن تكون u دالّة في متغير واحد فقط . ففي ظل هذا الشرط يمكننا المضي قدما نحو إيجاد الحل اللازم ، وذلك على النحو التالي:

الحالة الأولى : كون u دالّة في x فقط ، عندها يكون لدينا $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ومن ثم تحل $\frac{du}{dx}$ محل $\frac{\partial u}{\partial x}$ ، وبهذا تختزل المعادلة (3) إلى

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\,\frac{du}{dx}$$

أو

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dx = \frac{du}{u} \qquad (4)$$

ولو كان الطرف الأيسر من المعادلة (4) دألة في x فقط لاستطعنا إيجاد قيمة u فورا ، أي أن كون

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$$

يدعونا إلى مكاملة الطرفين لنحصل على

$$\int f(x)\,dx = \ln u$$

أو

$$u = e^{\int f(x)dx}$$

الحالة الثانية : وبالمثل عندما تكون u دالّة في y فقط ، عندها تختزل المعادلة (3) إلى المعادلة

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)= -M\frac{du}{dy}$$

أو

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dy = g(y)\,dy = -\frac{du}{u} \qquad (6)$$

ومن ثم نحصل على

$$u = e^{-\int g(y)\,dy}$$

ويمكننا تلخيص محتوى هذا البند على النحو التالي ، وذلك بعد اختبار المقدارين

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right),\quad \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

(أ) إذا كان لدينا

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)$$

فإن الدالّة

$$u = e^{\int f(x)\,dx}$$

هي عامل المكاملة للمعادلة التفاضلية

$$M\,dx + N\,dy = 0 \qquad (1)$$

(ب) إذا كان لدينا

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=g(y)$$

فإن الدالّة

$$u = e^{-\int g(y)\,dy}$$

هي عامل المكاملة للمعادلة التفاضلية (1) .

ملحوظة هامة . يجب على الطالب أن يتنبه إلى أن عدم تحقق أي من الحالتين أعلاه يدل على شئ واحد فقط ، وهو أنه لا يوجد للمعادلة المعنية (1) عامل مكاملة في متغير واحد فقط ، كما هو الحال في المثال الأخير من البند السابق حيث يتبين إخفاق تحقق أي من الحالتين أعلاه ، بالرغم من أن المقدار $(xy)^{-3}$ هو عامل المكاملة للمعادلة التفاضلية في المثال المذكور .

مثال ١. حل المعادلة التفاضلية

$$2y\,(x^2 - y + x)\,dx + (x^2 - 2y)\,dy = 0 \qquad (7)$$

الحل : نجد أولا $\frac{\partial M}{\partial y}$ وكذلك $\frac{\partial N}{\partial x}$ ، ثم نجد الفرق بينهما

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2(x^2 - y + x) - 2y \;,\; \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2(x^2 - 2y) = 2N$$

وطبقا للفقرة (أ) أعلا

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{2N}{N}$$

لذلك فإن الد'

$$u = e^{\int f(x)\,dx} = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$$

هي عامل المكاملة الذى يحوّل المعادلة (7) إلى معادلة تامة يسهل معها تطبيق طريقة البند ٢–٤ لنصل إلى مجموعة الحل

$$y\,(x^2 - y) = c\,e^{-2x}$$

مثال ٢. إذا كان لدينا منحنى ذو ميل تمثله المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

ويمر بالنقطة $(2,1)$ ، فأوجد معادلة هذا المنحنى .

الحل : لنعد كتابة المعادلة التفاضلية على النحو التالي

$$2xy\,dx + (y^2 - x^2)\,dy = 0$$

ولنجد $\frac{\partial M}{\partial y}$ وكذلك $\frac{\partial N}{\partial x}$ والفرق بينهما

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 4x$$

وبالقسمة على M نحصل على

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{2}{y} = g(y)$$

ثم نطبق الفقرة (ب) أعلاه لنجد أن عامل المكاملة

$$u = e^{-\int g(y)\,dy} = e^{-\int (2/y)\,dy} = e^{\ln y^{-2}} = y^{-2}$$

وبتطبيق طريقة البند ٤-٢ نجد أن مجموعة الحل عبارة عن العائلة

$$x^2 + y^2 = cy \qquad (8)$$

ولإيجاد حل معين يحقق الشرط الابتدائي $y(2) = 1$ نعوض في المعادلة (8) لنحصل على الحل الخاص

$$x^2 + y^2 = 5y$$

ملحوظة . يمكن حل المعادلة التفاضلية المعطاة في المثال الأخير على أنها معادلة متجانسة .

مثال ٢. حل المعادلة التفاضلية

$$(y^2 \cos x - y)\,dx + (x + y^2)\,dy = 0$$

الحل : نجد أولا $\frac{\partial M}{\partial y}$ و $\frac{\partial N}{\partial x}$ ، ثم نجد الفرق بينهما

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \cos x - 1 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2(y \cos x - 1)$$

وبقسمة الفرق على M نحصل على

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{2}{y}$$

وبتطبيق الفقرة (ب) نجد أن مجموعة الحل هي

$$y^2 - x = y\,(c - \sin x)$$

تمارين

أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 1$

(2) $(x^2 + y^2 + x)\,dx + y\,dy = 0$

(3) $xy' + 3y = x^2$

(4) $y\,(4x + y)\,dx - 2(x^2 - y)\,dy = 0$

(5) $y\,(4x + y - 2)\,dx + (xy + 1)dy = 0$

(6) $y' - \frac{2y}{x} = x^2 \sin 3x$

(7) $v\,(v + 2u - 2)\,du - 2(u + v)\,dv = 0$

(8) $\frac{dx}{dt} + 3x = e^{-2t}$; $x(0) = 5$

(9) $(3x^2 - y^2)\,dy - 2xy\,dx = 0$

(10) $x\,dy + y\,dx + 3\,x^2y^4dy = 0$

(11) $y^2dx + (3xy + y^2 - 1)dy = 0$

(12) $v' = (u - 3v)^{-1}$

(13) $(x^2 + 2y)\,dx - x\,dy = 0$

١٤ – تنص نظرية أويلر بالنسبة للدوال المتجانسة على أنه إذا كانت F دالّة متجانسة من الدرجة k في المتغيرين y , x ، فإن

$$x\,\frac{\partial F}{\partial x}+y\,\frac{\partial F}{\partial y}=k\,F$$

استخدم نظرية أويلر لتبرهن على أنه إذا كانت الدالتان N, M متجانستين من نفس الدرجة ، وإذا كان $M\,x+N\,y$ لا تساوي صفرا ، فإن المقدار $(M\,x+N\,y)^{-1}$ يكون عامل مكاملة للمعادلة التفاضلية $M\,dx+N\,dy=0$.

باستخدام نتيجة التمرين السابق أوجد حلولا للمعادلات التفاضلية التالية :

(15) $xy\,dx-\left(x^2+2y^2\right)dy=0$

(16) $y^2dx+\left(x^2+xy\right)dy=0$

(17) $x\left(t^2+x^2\right)dt-t\left(t^2+2x^2\right)dx=0$

(18) $\left(x^2+y^2\right)dx-xy\,dy=0$

٤-٤ الإحلال

ونعني به النظر إلى المعادلة التفاضلية $M\,dx+N\,dy$ ثم محاولة الاستفادة من المقادير المتماثلة المشتملة على أكثر من متغير ، ومن ثم إحلال متغير واحد فقط بدلا منها بحيث يتسنى حل المعادلة التفاضلية المذكورة بإحدى طرق الحل التي استعرضناها في البنود السابقة . وباختصار فإننا نسعى إلى إجراء عملية تغيير للمتغيرات لتحول المعادلة من هيئة أو شكل لا يخضع لطرق البنود السابقة إلى هيئة أو شكل غير ذي غرابة علينا ، أي يمكن حلها بإحدى طرق الحل السابقة .

وتفاديا للإطالة نستعرض الأمثلة التالية لإيضاح المقصود .

مثال ١. حل المعادلة التالية

$$(3x-2y+1)\,dx+(3x-2y+3)\,dy=0 \qquad (1)$$

الحل : يبدو أن هذه المعادلة لا تنطبق عليها أي من طرق الحل السابقة ، ولكن من الملاحظ أن المقدار $3x-2y$ قد تكرر في كل $M\,,\,N$. لذا فإننا نضع

$$u = 3x - 2y$$

عندها يكون لدينا

$$dy = \frac{1}{2}(3dx - du)$$

وتتحول المعادلة (1) إلى الشكل

$$(u+1)\,dx + (u+3)\left(\frac{1}{2}\right)(3dx - du) = 0$$

أو

$$2(u+1)\,dx + 3(u+3)\,dx - (u+3)\,du = 0$$

أو

$$(5u+11)\,dx - (u+3)\,du = 0$$

والآن يمكننا فصل المتغيرات لنحصل على

$$dx - \frac{u+3}{5u+11}\,du = 0$$

أو

$$5dx - \left(1 + \frac{4}{5u+11}\right)du = 0$$

وبإجراء التكامل المطلوب نحصل على

$$5x - u + \frac{4}{5}\ln|5u+11| = c$$

وبالتعويض عن قيمة u

$$2x + 2y - \frac{4}{5}\ln|15x - 10y + 11| = c$$

وبإعادة ترتيب الحدود والضرب في $\frac{5}{2}$ نصل إلى مجموعة الحل

$$5(x + y + c) = 2\ln|15x - 10y + 11|$$

مثال ٢. حل المعادلة

$$\sin y\,(x + \sin y)\,dx + 2x^2 \cos y\,dy = 0 \qquad (2)$$

الحل : باستخدام التعويض $w = \sin y$ يكون لدينا $dw = \cos y\, dy$ ، وتتحول المعادلة (2) إلى

$$w\,(x + w)\,dx + 2x^2 dw = 0$$

وهي معادلة متجانسة نطبق عليها طريقة البند ٢–٥ لننتهي إلى مجموعة الحل

$$x^3 w^2 = c\,(3x + w)^2$$

وبالتعويض مرة أخرى عن قيمة w نصل إلى مجموعة الحل

$$x^3 \sin^2 y = c\,(3x + \sin y)^2$$

تمارين

أوجد حلولا للمعادلات التفاضلية التالية :

(1) $(x + 2y - 1)\,dx + 3(x + 2y)\,dy = 0$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = (9x + 4y + 1)^2$

(3) $y' = \sin(x + y)$

(4) $(3\tan u - 2\cos v)\sec^2 u\,du + \tan u\ \sin v\,dv = 0$

(5) $(2t + x - 1)\,dx + (4t + 2x - 3)\,dt = 0$

(6) $y\,(x \tan x + \ln y)dx + \tan x\,dy = 0$

(7) $v' \tan u\ \sin 2v = \sin^2 u + \sin^2 v$

(8) $4\,(3x + y - 2)\,dx - (3x + y)dy = 0;\quad y(1) = 0$

(9) $y' = 2\,(3x + y)^2 - 1;\quad y(0) = 1$

٤–٥ معادلة برنولي Bernoulli equation

وهي معادلة مشهورة تنسب إلى إسم صاحبها عالم الرياضيات السويسري، وتحمل الشكل العام

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n \qquad (1)$$

حيث $n \neq 0$ أي عدد حقيقي . وتظهر هذه المعادلة في تطبيقات علمية متعددة ، وسنتعرض هنا لحل هذه المعادلة عندما تكون n مساوية أو مختلفة عن الواحد .

أولا : عندما n تساوي الواحد الصحيح . في هذه الحالة نحصل على

$$y' + P(x)y = Q(x)y$$

أو

$$y' + \big(P(x) - Q(x)\big)y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية ذات متغيرات منفصلة ينطبق عليها ما جاء في البند ٢-٣ .

ثانيا : عندما n لا تساوي واحدا . عندها يمكن إعادة كتابة المعادلة (1) على النحو

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P\, y^{-n+1} = Q \qquad (2)$$

لكن مشتقة y^{-n+1} تساوي $(1-n)\, y^{-n}\, dy$. وبالتالي يمكن تبسيط المعادلة (2) باستعمال التعويض

$$y^{-n+1} = z$$

ومنه ينتج لدينا

$$(1-n)\, y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

وبالتالي فإن اعتبار المعادلة كمعادلة في المتغيرين x , z يؤدي بنا إلى المعادلة التفاضلية التالية بعد ضرب المعادلة (2) في القيمة غير الصفرية $1 - n$

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)\, P\, z = (1-n)\, Q \qquad (3)$$

وهذه معادلة خطية في صيغتها القياسية (انظر البند ٢-٦) . وهكذا فإن أي معادلة تفاضلية من نوع برنولي يمكن حلها بهذا الإحلال الذى أجريناه على المتغير التابع y عدا الحالة التي تكون فيها n مساوية للواحد . فهي حالة لا تحتاج إلى أي إحلال أو استبدال .

مثال ١. حل المعادلة التفاضلية

$$y' = y - x\, y^3\, e^{-2x}$$

الحل : بادئ ذي بدء نكتب المعادلة في هيئة معادلة برنولي

$$y' - y = -x\, e^{-2x}\, y^3$$

حيث

$$P(x) = -1,\ Q(x) = -xe^{-2x}\ ,\ n = 3$$

الآن نقسم كل حد في المعادلة على y^3 ونضربه في dx لنحصل على

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} - y^{-2} = -xe^{-2x} \qquad (4)$$

ثم نجري الإحلال $z = y^{-2}$ ، ومنه $dz = -2y^{-3}\ dy$. وبالتعويض في (4) بعد ضرب كل حد فيها في -2 نصل إلى الصيغة الخطية في z

$$\frac{dz}{dx} + 2z = 2xe^{-2x} \qquad (5)$$

ثم نجد قيمة عامل المكاملة

$$v(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$$

الآن نضرب المعادلة (5) في e^{2x} لنحصل على

$$e^{2x}\frac{dz}{dx} + 2e^{2x}z = 2x$$

أو

$$\frac{d}{dx}\left(e^{2x}z\right) = 2x$$

وبمكاملة الطرفين بالنسبة إلى x نصل إلى

$$e^{2x}z = x^2 + c$$

ومنه ينتج لدينا بعد التعويض عن قيمة z أن مجموعة الحل المطلوبة هي

$$e^{2x} = y^2\ (x^2 + c)$$

مثال ٢. المعادلة

$$xy\ dx + (x^2 - 3y)\ dy = 0$$

عبارة عن معادلة برنولي في x ، أي أن شكلها العام بعد القسمة على $xy\ dy$ هو

$$\frac{dx}{dy} + y^{-1}\ x = 3x^{-1}$$

حيث

$$P(y) = y^{-1}\ ,\ Q(y) = 3\ ,\ n = -1$$

تمارين

أوجد حلول المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $2x^3y' = y\ (y^2 + 3x^2)$

(2) $6y^2dx - x\,(2x^3 + y)dy = 0$

(3) $y' - y = xy^2$

(4) $2xyy' = y^2 - 2x^3;\ \ y(1) = 2$

(5) $y' = \alpha y - \beta y^n\ ,\quad n \neq 0, 1$ (α, β ثوابت)

(6) $(y^4 - 2xy)\,dx + 3x^2dy = 0\,;\ \ y(2) = 1$

(7) $(2y^3 - x^3)\,dx + 3xy^2dy = 0;\ \ y(1) = 1$ حل بطريقتين مختلفتين

(8) $(u^2 + 6v^2)du - 4uv\,dv = 0;\ \ v(1) = 1$ حل بثلاث طرق مختلفة

(9) $xy' + y = x^4y^3$

(10) $xy^2y' + y^3 = x\cos x$

(11) $y' - 5y = -\frac{5}{2}xy^3$

(12) $y' - y = e^{2x}y^3$

(13) $y' = 2y\,x^{-1} - x^2y^2$

(14) $v' + v^3u + \frac{v}{u} = 0$

(15) $\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 + 2xy}{y^2}$

٤-٦ المعاملات الخطية ذات المتغيرين

لنلق نظرة على المعادلة التفاضلية

$$(a_1x + b_1y + c_1)\,dx + (a_2x + b_2y + c_2)\,dy = 0 \qquad (1)$$

حيث $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ جميعها ثوابت . ولنلاحظ أنه عندما تكون قيمتا c_1, c_2 مساوية للصفر فإن المعادلة تصبح معادلة متجانسة من الدرجة الأولى في

كل من y , x ، ويصبح حلها أمرا سهلا للغاية . ولهذا كان من الطبيعي جدا أن نحاول أن نجعل من المعادلة (1) معادلة متجانسة ، وهذا ما نحن بصدده هنا .

ولنبدأ بكتابة معاملي dx و dy على هيئة معادلتين خطيتين

$$a_1x + b_1 y + c_1= 0,$$
$$a_2x + b_2 y + c_2= 0, \qquad (2)$$

وهذان الخطان إما أن يكونا متوازيين ، وإما أن يتقاطعا . هذا في حالة تمثيلهما لخطين فعلا ، أي عندما يكون أحد الثابتين a_1, b_1 على الأقل مختلفا عن الصفر ، وكذلك الحال بالنسبة للثابتين a_2, b_2 . ذلك أنه في حالة كون كلا من a_1, b_1 مساويا للصفر في نفس الوقت فإن المعادلة (1) تصبح خطية بالنسبة للمتغير x . هذا وينطبق على y ما انطبق على x . إذا نحن أمام خيارين أو حالتين :

الحالة الأولى: عندما يتقاطع الخطان الممثلان بالمعادلة (2) . ولنفترض أن (h,k) هي نقطة التقاطع . عندها نستعمل التعويض

$$x = u + h$$
$$y = v + k$$

وباستعمال هذا التعويض في المعادلة (2) (مع ملاحظة أن النقطة (h,k) تحل المعادلتين (2) حلا آنيا) نحصل على معادلتين لمستقيمين يمران عبر نقطة الأصل في النظام الإحداثي الجديد . وبمعنى آخر فإننا نحصل على المعادلتين

$$a_1 u + b_1 v = 0 \qquad (3)$$
$$a_2 u + b_2 v = 0$$

و حيث أن $dx = du$ و $dy = dv$ ، فإن التعويض الذى تمثلة المعادلة (3) سيحول المعادلة التفاضلية (1) إلى معادلة تفاضلية جديدة هي

$$(a_1u + b_1v)\, du + (a_2u + b_2v)\, dv = 0 \qquad (5)$$

وهي معادلة نعرف كيف نتعامل معها من خلال ما تعلمناه سابقا .

الحالة الثانية : إذا كان الخطان اللذان تمثلهما المعادلة (2) لا يتقاطعان ، أي أنهما متوازيان . وذلك يعني رياضيا وجود ثابت k بحيث أن

$$a_2x + b_2y = k\,(a_1x + b_1y)$$

وبالتالي تكون المعادلة التفاضلية (1) على الشكل

$$(a_1x + b_1y + c_1)\, dx + \left[k\,(a_1x + b_1y) + c_2\right] dy = 0 \qquad (6)$$

عندها نلجأ إلى إحلال متغير جديد هو w محل المقدار $a_1x + b_1y$ نظرا لتكرره في المعادلة (6) ومنه ينتج لدينا

$$dw = a_1\ dx + b_1\ dy$$

ويكون لدينا خيار إستبدال dx أو dy . وتحت أي من الخيارين ننتهي إلى معادلة تفاضلية ذات متغيرات منفصلة نظرا لأن معامليها يشتملان فقط على w وثوابت .

طريقة حل المعادلات ذات المعاملات الخطية

الشكل العام للمعادلة

$$(a_1x + b_1y\ + c_1)\ dx + (a_2x + b_2y\ + c_2)\ dy = 0 \qquad (1)$$

(أ) حل المعادلتين الخطيتين التاليتين آنيا

$$a_1x\ + b_1y\ + c_1 = 0 \qquad (2)$$
$$a_2x + b_2y\ + c_2 = 0$$

فإذا وُجد حل وحيد (h,k) نجري التعويض

$$x\ = u + h$$
$$y\ = v\ + k$$

في المعادلة الأصلية مع استبدال dx و dy لنحصل على معادلة تفاضلية متجانسة .

(ب) إذا لم يكن هناك حل للمعادلة ، أي أن الخطين متوازيان لا يلتقيان ، عندها نجري الإحلال

$$w = a_1x + b_1y$$

لننتهي إلى معادلة تفاضلية ذات متغيرات منفصلة . هذا ويمكن التأكد من ذلك مباشرة إذا كان $a_2b_1 = a_1b_2$ ، فعندها نعلم أن الخطين متوازيان دون الحاجة إلى حل المعادلتين آنيا .

مثال ١. حل المعادلة التفاضلية

$$(-3x + y + 6)\ dx + (\ x + y + 2)\ dy = 0 \qquad (7)$$

الحل : حيث أن $a_1b_2 = -3$ لا يساوي $a_2b_1 = 1$ ، فلا بد من أن يكون للمعادلتين

$$-3x + y + 6 = 0$$
$$x + y + 2 = 0$$

حل آني وحيد هو $x = 1, y = -3$ ، أي أن نقطة التقاطع هي $(1,-3)$. الآن نقوم بإجراء التعويض $x = u + 1, y = v - 3$ ، ومنه نجري التعويض $dx = du$ ، وكذلك $dy = dv$ في المعادلة (7) لنصل إلى الصيغة الجديدة

$$(-3u + v)\, du + (u + v)\, dv = 0$$

وهي معادلة متجانسة نطبق عليها ماتعلمناه سابقا لنصل إلى مجموعة الحل النهائي

$$v^2 + 2uv - 3u^2 = c$$

وبالتعويض عن u و v نصل إلى حل المعادلة (7)

$$(y + 3)^2 + 2(x - 1)(y + 3) - 3(x - 1)^2 = c$$

مثال ٢. حل المعادلة التفاضلية

$$(2y - x - 1)\, dx - (6y - 3x + 2)\, dy = 0 \qquad (8)$$

الحل : حيث أن $a_2b_1 = 6 = a_1b_2$ ، فلا بد أن يكون الخطان اللذان تمثلهما المعادلتان

$$2y - x - 1 = 0$$
$$6y - 3x + 2 = 0$$

متوازيين . وكما هو متوقع نجري الإحلال $w = 2y - x$ ، ومنه نحصل على

$$dx = 2dy - dw$$

وبالتعويض في المعادلة (8) نحصل على

$$(w - 1)(2\, dy - dw) - (3w + 2)\, dy = 0$$

وبعد جميع الحدود المتشابهة نحصل على المعادلة

$$(w - 1)\, dw + (w + 4)\, dy = 0$$

والتي يمكن حلها بسهولة

$$w + y + c - 5 \ln |w + 4| = 0$$

وعليه فإن حل المعادلة يتمثل في مجموعة الحل

$$3y - x + c = 5 \ln |2y - x + 4|$$

تعريف. معادلة لاجرانج هي معادلة تفاضلية على الصورة

$$y = x f\left(\frac{dy}{dx}\right) + g\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

حيث

$$f\left(\frac{dy}{dx}\right) \neq \frac{dy}{dx}$$

وإذا افترضنا أن كلا من f , g دالة قابلة للاشتقاق ، فإننا نحصل على الحل العام بالطريقة التالية : نضع $\frac{dy}{dx} = p$ فنحصل مباشرة على

$$y = x f(p) + g(p) \qquad (1)$$

باشتقاق طرفي المعادلة (1) بالنسبة للمتغير x نحصل على

$$p = x f'(p) \frac{dp}{dx} + f(p) + g'(p) \frac{dp}{dx}$$

أو

$$p - f(p) = \left(\frac{dp}{dx}\right) \left[x f'(p) + g'(p)\right]$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x f'(p) + g'(p)}{p - f(p)}$$

أي أن

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{p - f(p)} x = \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$

وهي معادلة خطية من الرتبة الأولى حلها العام هو :

$$x e^{\int \frac{f'(p)}{f(p) - p} dp} = \int \frac{g'(p)}{p - f(p)} e^{\int \frac{f'(p)}{f(p) - p} dp} dp + c \qquad (2)$$

المعادلتان (1) ، (2) يمثلان الحل العام لمعادلة لاجرانج في صورة بارامتريه ، وإذا استطعنا حذف p من المعادلتين (1) ، (2) فإننا نحصل على علاقة بين y , x والثابت الاختيارى c .

مثال ٣ . أوجد الحل العام (في صورة بارامترية) للمعادلة

$$y = 2x \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^5$$

الحل : نضع $p = \frac{dy}{dx}$ فنحصل على

$$y = 2x\,p + p^2 - p^5 \qquad (3)$$

وبحساب المشتقة الأولى للطرفين بالنسبة للمتغير المستقل x نحصل على

$$p = 2xp' + 2p + \left(2p - 5p^4\right) p' .$$

ومنه

$$-p = 2x\,p' + \left(2p - 5p^4\right) p'$$

وبأخذ العامل المشترك

$$-p = \left(2x + 2p - 5p^4\right) \frac{dp}{dx}$$

وبالقسمة على p

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p} x = 5p^3 - 2$$

إذا الحل العام للمعادلة الأخيرة هو

$$xp^2 = \int p^2(5p^3 - 2)\, dp$$

$$= \frac{5p^6}{6} - \frac{2}{3} p^3 + c \qquad (4)$$

وكما يتضح فإن المعادلتين (4) , (3) تمثلان الحل العام في صورة بارامترية .

تمارين

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $(x + 2y - 4)\, dx - (2x + y - 5)\, dy = 0$

(2) $(-3x + y - 1)\, dx + (x + y + 3)\, dy = 0$

(3) $(v - 2)\, du + (v - u + 1)\, dv = 0$

(4) $(2x + y + 4)\,dx + (x - 2y - 2)\,dy = 0$

(5) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x + y} - 1$

(6) $(u - 4v - 9)\,du + (4u + v - 2)\,dv = 0$

(7) $(3x - y - 6)\,dx + (x + y + 2)\,dy = 0$

(8) $(2w - z)\,dw + (4w + z - 6)\,dz = 0$

(9) $(x - y - 2)\,dx + (x + y)\,dy = 0$

(10) $(x + y - 1)\,dx + (2x + 2y + 1)\,dy = 0$

(11) $(x - 2)\,dx + 4(x + y - 1)\,dy = 0$

(12) $(u - 4v - 3)\,du - (u - 6v - 5)\,dv = 0$

(13) $(y - 3x + 2)\,dy + 3\,(3x + y - 4)\,dx = 0$

(14) $(6u - 3v + 2)\,du + (v - 2u + 1)\,dv = 0$

(15) $(x - 1)\,dx - (3x - 2y - 5)\,dy = 0$

(16) $(9u - 4v + 4)\,du - (2u - v + 1)\,dv = 0$

(17) $(x + 3y - 4)\,dx + (x + 4y - 5)\,dy = 0$

(18) $(2x - 3y + 4)\,dx + 3(x - 1)\,dy = 0; \quad y(3) = 2$

(19) $(u + v - 4)\,du + (v - 3u + 4)\,dv = 0; \quad v(4) = 1$

(20) $(2u - 3v + 4)\,du + 3\,(u - 1)\,dv = 0; \quad v(3) = 2$

(21) $(x + y - 4)\,dx + (y - 3x + 4)\,dy = 0; \quad y(3) = 7$

٤-٧ ملخص الباب

لقد عالجنا في هذا الباب عدة أنواع مختلفة من المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى ، وناقشنا كيفية إيجاد مجموعة الحل التابعة لكل نوع من هذه المعادلات على حدة . وفيما يلي ملخص شامل لهذه الأنواع :

(أ) معادلات يمكن تحويلها إلى معادلات تامة بمجرد التخمين . ونعني بالتخمين تخمين عامل المكاملة تخمينا يعتمد على الخبرة والمران .

(ب) معادلات يمكن تحويلها إلى معادلات تامة إذا توافر فيها أحد الشرطين التاليين :

١- إذا كان المقدار $\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)/N$ يعتمد على x فقط ونرمز له بالمقدار $f(x)$.

٢- إذا كان المقدار $\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)/M$ يعتمد على y فقط ونرمز له بالمقدار $g(y)$.

هذا بافتراض أن المعادلة التفاضلية معطاة على الصورة $M\,dx+N\,dy=0$. وفي حالة تحقق الشرط الأول ، فإن الدالّة $u(x)=e^{\int f(x)\,dx}$ تلعب دور عامل المكاملة الذي يحقق تمام المعادلة بضربها فيه . أما في حالة تحقق الشرط الثاني فإن الدالّة $v(y)=e^{-\int g(y)\,dy}$ هي التي تلعب دور عامل المكاملة .

(ج) أما الإحلال فناشئ عن طبيعة المعادلة نفسها ويحتاج إلى فراسة وتدقيق من القارئ لاختيار الإحلال المناسب الذى يحيل المعادلة من وضعها المستعصي إلى وضع سليم مناسب يسهل حله بالطرق السابقة التي ألفناها.

(د) معادلة برنولي $y'+P(x)\,y=Q(x)\,y^{n}$. عندما n لا تساوي صفرا أو واحدا فإننا نلجأ إلى التعويض $z=y^{-n+1}$ ، ومنه $\frac{dz}{dy}=(1-n)\,y^{-n}$. وباكتمال إجراءات التعويض في المعادلة نحصل على معادلة خطية في صيغتها القياسية بالنسبة للمتغير z .

(هـ) المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية في متغيرين ، وهي على الصيغة

$$(a_1x+b_1\,y\;+c_1)\,dx+(a_2\,x+b_2y+c_2)\,dy=0$$

إذا كانت $a_1b_2\neq a_2\,b_1$ نجرى التعويض $x=u+h$ و $y=v+k$ حيث $h\,,k$ يحققان آنيا المعادلتين التاليتين

$$a_1h+b_1k\;+c_1=0$$
$$a_2\,h+b_2\,k+c_2=0$$

عندها تتحول المعادلة بفضل هذا التعويض إلى معادلة متجانسة .

أما اذا كانت $a_1b_2=a_2\,b_1$ ، فإنه يكون لدينا $a_1h+b_1\,k\;=\alpha\,(a_2\,h+b_2k)$. وعندها نكتفي بالتعويض $w=a_1\,x+b_1\,y$.

٤-٨ تمارين عامة

فيما يلي أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $(y^2 - 3y - x)\, dx + (2y - 3)\, dy = 0$

(2) $y' = \dfrac{e^{x+y}}{y - 1}$

(3) $u\,(u - 3v^2 - 1)\, dv + (v^3 + v + 1)\, du = 0$

(4) $(y^3 + y + 1)\, dx + x\,(x - 3y^2 - 1)\, dy = 0$

(5) $y' - \dfrac{y}{x} = x^2 \sin 2x$

(6) $2xy\, dx + (y^5 - x^2)\, dy = 0$

(7) $(v + 3u - 5)\, dv - (v - u - 1)\, du = 0$

(8) $(2x + y - 4)\, dx + (x - 3y + 12)\, dy = 0$

(9) $(u - 4v + 7)\, du + (u + 2v + 1)\, dv = 0$

(10) $y^3 \sec^2 x\, dx - (1 - 2y^2 \tan x)\, dy = 0$

(11) $w\, z\, dw + (z^4 - 3w^2)\, dz = 0$

(12) $x^3 y\, dx + (3x^4 - y^3)\, dy = 0$

(13) $y' + 2y = y^2$

(14) $(v - 2u - 1)\, du + (u + v - 4)\, dv = 0$

(15) $(5x + 3e^y)\, dx + 2x\, e^y\, dy = 0$

(16) $(x^2 - 3y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$

(17) $2(u - v - 2)\, dv + (u - 3v + 4)\, du = 0$

(18) $y\, dx = x\,(1 + xy^4)\, dy$

(19) $(x - 2)\, dx + 4\,(y + x - 1)\, dy = 0$

(20) $(3x - y - 5)\, dx + (x - y + 1)\, dy = 0$

(21) $(x^3 - y)\, dx + x\, dy = 0; \quad y(1) = 3$

(22) $2x\,dv + v\,(2 + v^2x)\,dx = 0; \quad v(1) = \frac{1}{2}$

(23) $(2x - 3y + 1)\,dx - (3x + 2y - 4)\,dy = 0; \quad y(1) = 1$

(24) $(u + 4v + 3)\,du - (2u - v - 3)\,dv = 0$

(25) $(x - y - 1)\,dx + 2\,(2 - y)\,dy = 0$

(26) $(2x + 4y - 1)\,dx - (x + 2y - 3)\,dy = 0$

(27) $4u\,dv + 3\,(2v - 1)\left(du + u^4 dv\right) = 0; \quad v(1) = 1$

(28) $y' - \frac{2y}{x} = (xy)^{-1}; \quad y(1) = 3$

(29) $y(x - 1)\,dx - (x^2 - 2x - 2y)\,dy = 0; \quad y(1) = -1$

(30) $\left(6uv - 3v^2 + 2v\right)du + 2(u - v)\,dv = 0; \quad y(0) = 1$

(31) $(x - y + 2)^2\,dy + 4\,dx = 0$

الباب الخامس

المعادلات التفاضلية ذات الرتب العليا

■ مقدمة ■ الاستقلال الخطي ونظرية وجود حل وحيد ■ قيمة الرونسكيان ■ الحل العام للمعادلة المتجانسة ■ الحل العام للمعادلة غير المتجانسة ■ المؤثر التفاضلي ■ المزيد عن المؤثر التفاضلي ■ ملخص الباب .

٥-١ مقدمة

في الأبواب السابقة إنصبّ جُل إهتمامنا على دراسة الطرق المختلفة الكفيلة بحل أنواع مختلفة من المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى ، أي تلك التي تشتمل على dy/dx فقط أو مايعادلها رياضيا مثل y' .

وفي هذا الباب نسعى لدراسة معادلات تفاضلية ذات رتبة أعلى من الرتبة الأولى دراسة ذات صبغة عامة موجزة نقدم من خلالها النظرية الأساسية والركيزة الرئيسية لمعالجة هذا النوع من المعادلات ذات الرتبة المتقدمة .

ولعل أنسب ما نبدأ به هذه المعالجة هو إعادة استذكار الشكل العام للمعادلة التفاضلية الخطية ذات الرتبة n ، والتي تحمل الشكل التالي :

$$b_0(x)\,\frac{d^n y}{dx^n} + b_1(x)\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + b_{n-1}(x)\,\frac{dy}{dx} + b_n(x)\,y = R(x) \quad (1)$$

حيث الدوال $b_0, b_1, \ldots, b_n, R$ تعتمد على المتغير x فقط ومستقلة تماما عن y.
ويقال للمعادلة (1) أنها ذات معاملات ثابتة إذا كان كل من $b_0, b_1, \ldots, b_n$ ثابتا .
ويقال عن المعادلة نفسها أنها ذات معاملات متغيرة إذا كان أي من $b_0, b_1, \ldots, b_n$ متغيرا . كما يقال للمعادلة (1) أنها متجانسة إذا كانت $R(x) = 0$ ، وإلا فهي غير متجانسة .

حقيقة ١. إذا كان كل من y_1 و y_2 حلا للمعادلة التفاضلية المتجانسة

$$b_0(x)\, y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + b_{n-1}(x)\, y' + b_n(x)\, y = 0 \qquad (2)$$

وإذا كان c_2 , c_1 ثابتين ، فإن الدالة

$$y = c_1 y_1 + c_1 y_2$$

تمثل أيضا حلا للمعادلة (2).

البرهان : ياترى ماذا نعني بأن y_1 تمثل حلا للمعادلة (2) ؟ لا شك أن الجواب الرياضي على هذا السؤال هو أن y_1 تحقق المعادلة (2) ، أو بمعنى آخر

$$b_0(x)\, y_1^{(n)} + b_1(x) y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + b_{n-1}(x)\, y_1' + b_n(x)\, y_1 = 0 \qquad (3)$$

وكذلك الحال بالنسبة إلى y_2 :

$$b_0(x)\, y_2^{(n)} + b_1(x) y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + b_{n-1}(x)\, y_2' + b_n(x)\, y_2 = 0 \qquad (4)$$

الآن لنضرب كل حد في المعادلة (3) بالثابت c_1 ، وكل حد في المعادلة (4) بالثابت c_2 ، ثم نجمع المعادلتين لنحصل على

$$b_0\left(c_1\, y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)}\right) + b_1\left(c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)}\right) + \ldots$$
$$+ b_{n-1}(\, c_1 y_1' + c_2 y_2') + b_n(c_1 y_1 + c_2 y_2) = 0 \qquad (5)$$

وحيث أن

$$c_1 y_1' + c_2 y_2' = (c_1 y_1 + c_2 y_2)'$$

وكذلك الحال بالنسبة للمشتقات العليا

$$c_1 y_1^{(k)} + c_2 y_2^{(k)} = (c_1 y_1 + c_2 y_2)^{(k)}$$

فانه مامن شك أنه يمكننا إعادة كتابة المعادلة (5) على النحو التالي

$$b_0\, (c_1 y_1 + c_2 y_2)^{(n)} + b_1 (c_1 y_1 + c_2 y_2)^{(n-1)} + \ldots$$
$$+ b_{n-1}(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + b_n(c_1 y_1 + c_2 y_2) = 0 \qquad (6)$$

ولو أننا اخترنا

$$w = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

لتبين لنا على الفور أن w يحقق المعادلة (2) كما هو المطلوب اثباته . أما الحالة التي تكون فيها $c_1 = 0$ أو $c_2 = 0$ فبديهية ، حيث أن أي حل لمعادلة متجانسة يعني أن ضربه في ثابت سيكون هو الآخر حلا بالتاكيد . وهذا هو تمام البرهان .

وبالمثل فـانه إذا كـان كل من $y_1 , y_2 ,..., y_k$ حلا للمعادلة (2) فـإن أي تشكيل خطي سيكون حلا للمعادلة نفسها ، وبمعنى آخر إذا كانت $c_1 , c_2 ,..., c_k$ ثوابت حقيقية ، فإن

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_k y_k$$

يمثل حلا للمعادلة نفسها . هذا ويمكننا صياغة الحقيقة السابقة وما تلاها من نقاش على النحو التالي :

نظرية ١. أي تشكيل خطي من حلول معادلة تفاضلية خطية متجانسة يشكل حلا للمعادلة نفسها .

٥-٢ الاستقلال الخطي ونظرية وجود حل وحيد

في هذا البند سنتحدث عن مفهوم الاستقلال الخطي لمجموعة من الدوالّ وعلاقة ذلك بحلول المعادلة الخطية المتجانسة ، كما سنتعرض بإيجاز لنظرية وجود الحل ووحدانيته . ثم نناقش ما يُسمى بالرونسكيان وهو مقدار محددة ذات علاقة وثيقة بالحلول المستقلة للمعادلة المتجانسة ، وعن طريقه يمكن الاستدلال على استقلالية عدد من الحلول الموجودة .

تعريف. لتكن $f_1 , f_2 ,..., f_k$ مجموعة معينة من الدوالّ . إذا أمكن إيجاد ثوابت $c_1 , c_2 , ... , c_k$ ليست جميعها مساوية للصفر بحيث أن

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... + c_k f_k = 0 \qquad (1)$$

لجميع قيم x في فترة مغلقة $[a , b]$ ، عندها نقول أن الدوال $f_1 , f_2 ,..., f_k$ غير مستقلة خطيا .

أما إذا استحال وجود ثوابت تحقق المعادلة (1) خلال أي فترة $[a , b]$ ، فإن هذه المجموعة من الدوالّ توصف بانها مستقلة خطيا ، أي أنه لا يمكن للمعادلة (1) أن تتحقق الا في حالة واحدة فقط ، وهي أن تكون جميع الثوابت مساوية للصفر .

ملاحظة. يتضح لنا من تعريف الدوالّ غير المستقلة خطيا أن أحد هذه الدوالّ على الأقل يمكن كتابته كتشكيل خطي من الدوالّ الأخرى في المجموعة نفسها ، فمثلا في المعادلة (1) لو أن c_3 لا يساوي صفرا ، فإنه يمكننا قسمة جميع الحدود على c_3 لنحصل على

$$f_3 = (-1/c_3)\,[c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_4 f_4 + \dots + c_n f_n] \qquad (2)$$

وبالطبع فإنه يستحيل علينا كتابة ذلك إذا كانت المجموعة مستقلة خطيا .

وفي البند ٢-٢ تحدثنا عن نظرية وجود الحل ووحدانيته للمعادلة التفاضلية ذات الرتبة الأولى . وفيما يلي نص لنظرية تُعد تعميما أو تطويرا لهذه النظرية بحيث تشمل المعادلات التفاضلية ذات الرتبة العليا . ولكن قبل أن نبدأ فإننا نعود إلى المعادلة (1) في البند السابق ، وبافتراض أن b_0 لا تساوي الصفر لأي نقطة في الفترة I التي تمثل حيز التعريف للدوال R , b_k. هنا يمكننا القسمة على b_0 لنحصل على الصيغة القياسية للمعادلة (1) ، وهي كالتالي :

$$y^{(n)} + P_1\, y^{(n-1)} + \dots + P_n\, y = R \qquad (3)$$

نظرية وجود الحل ووحدانيته . لتكن $P_1 , \dots , P_n , R$ دوالاً متصلة على الفترة (a , b) . لنفترض أن x_0 نقطة داخل الفترة المفتوحة (a , b) ، وأن y_0 ، y_1 ، … ، y_{n-1} عبارة عن n من الأعداد المعطاة . عندها يُوجد دالّة وحيدة معرفة على الفترة (a , b) تمثل حلا للمعادلة التي أشرنا اليها أعلاه ، وهي

$$y^{(n)} + P_1\, y^{(n-1)} + \dots + P_n\, y = R \qquad (3)$$

على الفترة (a , b) وتحقق الشروط الابتدائية

$$y(x_0) = y_0 \,,\, y'(x_0) = y_1 ,\, \dots ,\, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

أما البرهان فلن نتناوله هنا ، وإنما يكفينا نص النظرية لأهميتها الكبيرة بالنسبة للبنود القادمة .

وفيما يلي مثالا يوضح نص النظرية وتطبيقها .

مثال ١. ليس من الصعب التأكد من أن كلا من الدالتين

$$y_1(x) = e^{2x} \cos 3x \quad , \quad y_2(x) = e^{2x} \sin 3x$$

يمثل حلا للمعادلة التفاضلية المتجانسة ذات الرتبة الثانية

$$y'' - 4y' + 13y = 0 \qquad (4)$$

المطلوب إيجاد حل للمعادلة (4) يحقق الشرطين الابتدائيين

$$y(0) = 2 \quad , \quad y'(0) = -5 \qquad (5)$$

الحل : طبقا للحقيقة ١ ، فإن أي تشكيل على النحو

$$y(x) = c_1\, e^{2x} \cos 3x + c_2\, e^{2x} \sin 3x \qquad (6)$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية ، يمثل حلا للمعادلة (4) ولهذا فإنه يتوجب علينا اختيار ثابتين اختياريين مناسبين بحيث تحقق $y(x)$ الشرطين (5) اضافة إلى المعادلة (4) . بمفاضلة (6) نحصل على

$$y'(x) = c_1(2e^{2x} \cos 3x - 3e^{2x} \sin 3x)$$
$$+ c_2(3e^{2x} \cos 3x + 2e^{2x} \sin 3x) \qquad (7)$$

وبالتعويض من (6) و (7) في الشرطين (5) نحصل على

$$y(0) = 2 = c_1 \quad , \quad y'(0) = -5 = 2c_1 + 3c_2$$

وبإجراء التبسيط اللازم نحصل على $c_1 = 2 \;,\; c_2 = -3$. وبالتعويض عنهما في المعادلة نحصل على الحل الوحيد

$$y(x) = 2e^{2x} \cos 3x - 3e^{2x} \sin 3x$$

٣-٥ قيمة الرونسكيان Wronskian

سبق أن عرضنا في البند السابق مفهوم الاستقلال الخطي لمجموعة من الدوالّ المعرفة على الفترة $[a, b]$. وسنحاول هنا الإفادة من قيمة محددة determinant ذات علاقة وطيدة بحلول المعادلة ، فنستدل من مخالفة قيمة هذه المحددة للصفر على استقلالية هذه الحلول والعكس كذلك صحيح تحت بعض الشروط.

تعريف . لنفترض أن كلا من الدوالّ $f_1, f_2, \dots, f_n$ قابلة للاشتقاق $n-1$ مرة على الأقل في الفترة (a, b) . عندها نطلق على الدالّة الناتجة عن مقدار المحددة

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W\left[f_1, \dots, f_n\right](x)$$

رونسكيان الدوال $f_1, f_2, \dots, f_n$.

مثال ١ . لو أن f_1, f_2 دالتان قابلتان للاشتقاق على الفترة $[0,1]$ ، فإن رونسكيان f_1, f_2 يساوي

$$W[f_1, f_2](x) = f_1(x) f_2'(x) - f_1'(x) f_2(x)$$

نظرية ٢ . لنفترض أن المجموعة $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ تمثل مجموعة من الحلول على الفترة (a, b) للمعادلة التفاضلية

$$y^{(n)}(x) + P_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \dots + P_n(x)\, y(x) = 0$$

حيث $P_1, P_2, \dots, P_n$ دوالّ متصلة على (a, b) ذات رونسكيان يختلف عن الصفر عند أي نقطة x_0 داخل الفترة (a, b) ، أو

$$W\left[y_1, y_2, \dots, y_n\right](x_0) \neq 0$$

عندها تكون مجموعة الحلول $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ مستقلة خطيا .

ولن نتعرض هنا لبرهان هذه النظرية ، بل سنكتفي بعرض المثال التالي :

مثال ١ . هل الدوالّ التالية

$$y_1(x) = x \quad , \quad y_2(x) = x^2 \quad , \quad y_3(x) = \frac{1}{x}$$

تمثل مجموعة من الحلول المستقلة خطيا للمعادلة التفاضلية

$$x^3\, y''' + x^2\, y'' - 2x\, y' + 2y = 0, \quad x > 0$$

الحل : السؤال يفترض أن هذه الدوالّ تمثل حلولا فعلية للمعادلة . وبإمكان القارئ التأكد من ذلك بسهولة بمجرد التعويض في المعادلة . ولكن السؤال منصب على بحث الاستقلالية الخطية لهذه الحلول . والجواب على ذلك يتم باستعمال النظرية السابقة التي تدعونا إلى إيجاد قيمة الرونسكيان

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & x^2 & x^{-1} \\ 1 & 2x & -x^{-2} \\ 0 & 2 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = \frac{6}{x}$$

وهو ذو قيمة تختلف عن الصفر لجميع قيم x الأكبر من الصفر . وبهذا تتحقق الاستقلالية الخطية لهذه المجموعة من الحلول .

هذا ونختم هذا البند بنظرية أكثر شمولا من النظرية السابقة وأعم نفعا .

نظرية ٣. بإفتراض أنه على الفترة (a, b) تكون $\{b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n\}$ مجموعة من الدوالّ المتصلة وبشرط أن يكون $b_0(x) \neq 0$ ، فإن مجموعة الحلول $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ المحققة للمعادلة التفاضلية

$$b_0 y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} y' + b_n y = 0$$

ستكون مستقلة خطيا إذا وفقط إذا كان رونسكيان الدوالّ $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ لا يساوي صفرا على الفترة (a, b) .

ملاحظة. أطلق إسم الرونسكيان على هذه المحددة تخليدا لذكرى مكتشفه عالم الرياضيات البولندي هوني رونسكي Hoene Wronski الذى عاش خلال الفترة من ١٧٧٨ إلى ١٨٥٣ بعد الميلاد .

مثال ٢ . مجموعة الدوالّ $\{\cos wt \ , \sin wt \ , \sin (wt+\alpha)\}$ غير مستقلة خطيا ، حيث t هو المتغير بينما w و α ثوابت . وذلك يعني وجود ثوابت $c_1 \ , c_2 \ , c_3$ ليست جميعها صفرية بحيث أن

$$c_1 \cos wt + c_2 \sin wt + c_3 \sin (wt+\alpha) = 0$$

لجميع قيم t . وبالفعل فإن إحدى هذه الاختيارات لمجموعة الثوابت يمكن ان تكون

$$c_1 = \sin \alpha \ , \ \ c_2 = \cos \alpha \ , \ \ c_3 = -1 \ .$$

تمارين

١ – أوجد رونسكيان مجموعة الدوالّ $\{1 \ , x \ , x^2, \ \ldots \ , x^{k-1}\}$ حيث k أكبر من 1.

٢ – اثبت أن مجموعة الدوالّ $\{e^{3x} \ , e^{-x}, e^{5x}\}$ مستقلة خطيا لكل قيم x الحقيقية .

٣ – أوجد رونسكيان المجموعة $\{1, \sin^2 x, \cos^2 x\}$. هل هذه المجموعة مستقلة خطيا ؟ علل !

٤ – اثبت أن الدوال

$$f_1(x) = x \ , \ f_2(x) = xe^x \ , f_3(x) = e^x \ , \ f_4(x) = (2-3x)\, e^x$$

غير مستقلة خطيا ، وذلك بإيجاد مجموعة ثوابت $\{c_1 \ , c_2 \ , c_3 \ , c_4\}$ ليست جميعها صفرا بحيث تتحقق المتطابقة

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + c_4 f_4(x) = 0$$

٤–٥ الحل العام للمعادلة المتجانسة

اعتمادا على ما سبق من بنود في هذا الباب ، فإنه يمكننا أن نقدم هنا واحدة من أهم النتائج التي تعتمد عليها نظرية المعادلات التفاضلية .

نظرية ٤ . لنفترض أن مجموعة الدوال $\{y_1 \ , y_2 \ , \ldots \ , y_n\}$ تمثل حلولا مستقلة خطيا للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

$$b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}(x)\, y' + b_n(x)\, y = 0 \qquad (1)$$

حيث x عنصر في الفترة (a, b) ، بينما الدوال $\{b_0(x), b_1(x), \dots, b_n(x)\}$ كلها متصلة ، وأن $b_0(x) \neq 0$ على الفترة (a, b) . إذا كانت الدالة ϕ تمثل حلا للمعادلة (1) على الفترة (a, b) ، فلا بد من وجود ثوابت $\{c_1^*, c_2^*, \dots, c_{n-1}^*, c_n^*\}$ بحيث أن

$$\phi = c_1^* y_1 + c_2^* y_2 + \dots + c_n^* y_n \qquad (2)$$

البرهان : سنكتفي هنا باستعراض أهم خطوات البرهان عندما $n = 2$ ، وهي نفس الخطوات اللازمة عندما تكون n أكبر من 2 . ولنبدأ بالمعادلة التفاضلية

$$b_0(x)\, y'' + b_1(x)\, y' + b_2(x) y = 0 \qquad (3)$$

ولتكن الدالتان y_1 ، y_2 حلين مستقلين خطيا للمعادلة (3) على الفترة (a, b) . ولتكن x_0 أي نقطة في (a, b) . بتطبيق النظرية ٣ في البند السابق ، نستنتج بأن رونسكيان $\{y_1, y_2\}$ يختلف عن الصفر عند النقطة x_0 ، أو

$$W = y_1(x_0)\, y_2'(x_0) - y_1'(x_0)\, y_2(x_0) \neq 0 \qquad (4)$$

ومن ذلك نستنتج أن المعادلتين الآتيتين

$$c_1\, y_1(x_0) + c_2\, y_2(x_0) = \phi(x_0)$$
$$c_1\, y_1'(x_0) + c_2\, y_2'(x_0) = \phi'(x_0)$$

لها حل وحيد هو $c_1 = c_1^*$ ، $c_2 = c_2^*$ ، أي أن

$$c_1^*\, y_1(x_0) + c_2^*\, y_2(x_0) = \phi(x_0)$$
$$c_1^*\, y_1'(x_0) + c_2^*\, y_2'(x_0) = \phi'(x_0)$$

لننظر الآن إلى المعادلة

$$f = c_1^* y_1 + c_2^* y_2 \qquad (5)$$

حيث أن f مكونة من تشكيل خطي من حلين للمعادلة (3) على الفترة (a, b) ، فهي لا بد أن تكون كذلك حلا على نفس الفترة . وبالإضافة

$$f(x_0) = c_1^*\, y_1(x_0) + c_2^*\, y_2(x_0)$$
$$f'(x_0) = c_1^*\, y_1'(x_0) + c_2^*\, y_2'(x_0)$$

ومنه نجد أن $f(x_0) = \phi(x_0)$ وأن $f'(x_0) = \phi'(x_0)$. وطبقا لنظرية وحدانية الحل المذكورة في البند ٥-٢ ، فإن الدالّتين ϕ , f لا بد أن تكونا متطابقتين وتمثلان نفس الحل ، أي أن

$$\phi = c_1^* \, y_1 + c_2^* \, y_2$$

وبهذا يكتمل برهان النظرية .

تعريف. بافتراض تحقق فرضيات نظرية ٤ ، فإننا نطلق على الدالة

$$y = c_1 \, y_1 + c_1 \, y_1 + \dots + c_n \, y_n$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية (1) حيث $\{c_1 , c_2 , \dots , c_n\}$ ثوابت اختيارية .

ملحوظة . يجب على القارئ أن يلاحظ أن افتراضنا أن $b_0(x) \neq 0$ على الفترة (a , b) ضروري . وللايضاح نضرب مثالا لذلك بمعالجة المعادلة الخطية التالية

$$x \, y' - 2y = 0$$

ذات الحل العام $y = c \, x^2$ ، فالحل الخاص

$$y_1 = x^2 \text{ for } x \geq 0, \text{ and } y_1 = -4x^2 \text{ for } x < 0 \qquad (6)$$

لا يُعتبر حالة خاصة من الحل العام y لأن أي حالة خاصة تقتضي قيمة واحدة ثابتة للثابت الاختياري c . لكن y_1 يمكن اعتبارها حالة خاصة من الحل العام على أي فترة (a , b) بحيث $b_0(x) = x \neq 0$. وبالتالي فإن أي فترة تحقق هذا الشرط لا بد أن تكون برمتها على يمين الصفر أو على يساره ، ومن ثم فالثابت c إما أن يساوي1 أو 4-. أما y_1 كما هي معطاة في (6) فهي عبارة عن دالتين تم وصلهما عند نقطة الأصل ، وكل من هاتين الدالتين تمثل حلا خاصا مشتقا من الحل العام .

٥-٥ الحل العام للمعادلة غير المتجانسة

نظرية ٥. ليكن y_p (المعرفة على الفترة (a , b)) حلا خاصا للمعادلة التفاضلية

$$b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y = R(x) \qquad (1)$$

ولتكن المجموعة $\{y_1 , y_2 , \dots , y_n\}$ تمثل حلولا مستقلة خطيا للمعادلة المتجانسة

$$b_0(x)\, y^{(n)} + b_1(x) y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x)\, y' + b_n(x)\, y = 0 \qquad (2)$$

عندها يجب أن يكون أي حل للمعادلة (1) على الصيغة

$$y = c_1\, y_1 + c_1\, y_1 + \dots + c_n\, y_n + y_p \qquad (3)$$

حيث $\{c_1 , c_2 , \dots , c_n\}$ مجموعة من الثوابت الاختيارية .

البرهان : لنفترض أن $\phi(x)$ يمثل حلا للمعادلة (1) . بما أن كلا من ϕ و y_p يمثل حلا للمعادلة (1) ، فإن الفرق $\phi - y_p$ يمثل حلا للمعادلة (2) . وبتطبيق نظرية ٤ نستنتج وجود ثوابت اختيارية مناسبة $\{c_1 , c_2 , \dots , c_n\}$ بحيث أن

$$\phi - y_p = c_1\, y_1 + c_1\, y_1 + \dots + c_n\, y_n$$

وبوضع y بدلا من ϕ نحصل على (3) . وهذا هو المطلوب .

هذا ويطلق على y_p مسمى الحل الخاص the particular solution ، أما

$$y = c_1\, y_1 + c_1\, y_1 + \dots + c_n\, y_n \qquad (4)$$

فتسمى الدالة المكملة the complementary function ، ذلك أنها تمثل الحل العام للمعادلة المتجانسة(2) وليست حلا للمعادلة الأصلية (1) . وعلى هذا فإن الحل العام للمعادلة (1) هو عبارة عن مجموع الحل الخاص والدالة المكملة ، أي أن

$$y = y_c + y_p \qquad (5)$$

وأما المجموعة $\{y_1 , y_2 , \dots , y_n\}$ كما جاءت في نظرية ٥ فيطلق عليها مجموعة الحل الأساسية the fundamental solution set ، أي أنها مجموعة مستقلة خطيا عددها يساوي رتبة المعادلة وكل منها يمثل حلا للمعادلة المتجانسة (2) .

مثال ١. لو علمنا أن الدالة $y_p(x) = x^2$ تمثل حلا خاصا للمعادلة التفاضلية

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^2 - 2x - 4 \qquad (6)$$

على الفترة $(-\infty , \infty)$ بينما تمثل كل من الدوال

$$y_1(x) = e^{-x} , \quad y_2(x) = e^{x} , \quad y_3(x) = e^{2x}$$

حلا للمعادلة المتجانسة المرتبطة بها . أوجد الحل العام للمعادلة (6) .

الحل : من السهل أن نثبت أن الدوالّ y_1 , y_2 , y_3 مستقلة خطيا ، وحيث أن عددها يساوي رتبة المعادلة (6) ، فإن المجموعة $\{y_1 , y_2 , y_3\}$ تمثل مجموعة الحل الأساسية للمعادلة (6) . وبتطبيق نظرية ٥ يتضح لنا أن الحل العام هو

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x} + x^2$$

مثال ٢. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' = 2 \qquad (7)$$

الحل : نلاحظ أولا أن الدالتين $y_1 = 1 \; , \; y_2 = x$ مستقلتان خطيا على أي فترة وأن كلا منهما يمثل حلا للمعادلة المتجانسة $y'' = 0$. لذا فإن الدالة المكملة هي

$$y_c = c_1 + c_2 x$$

وكذلك فإن الدالة $y_p(x) = x^2$ تعتبر حلا خاصا للمعادلة (7) لأن $y_p = 2$. ولذا فإن الحل العام للمعادلة (7) هو

$$y = c_1 + c_2 x + x^2$$

تمارين

فيما يلي حدد فيما إذا كانت الدوالّ المعطاة تشكل مجموعة الحل الأساسية للمعادلة التفاضلية المعطاة معها في نفس التمرين ، وفي حالة الإيجاب أوجد الحل العام :

(1) $y''' + 2y'' - 11y' - 12y = 0; \quad \{e^{3x} , e^{-x}, e^{-4x}\}$

(2) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0; \quad \{\cos 2x , \sin 2x , e^{x}\}$

(3) $y^{(4)} - y = 0; \quad \{\cos x , 1 , e^{-x}, e^{x}\}$

(4) $y^{(4)} - y = 0; \quad \{\cos x , \sin x , e^{-x} , e^{x}\}$

(5) $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0; \quad x > 0, \quad \{x , x^3\}$

(6) $t^3 \dfrac{d^3x}{dt^3} - 3t^2 \dfrac{d^2x}{dt^2} + 6t \dfrac{dx}{dt} - 6x = 0 ; \quad t > 0, \quad \{t , t^2 , t^3\}$

فيما يلي من التمارين تُعطى المعادلة التفاضلية مع حلها الخاص y_p ، وكذلك مجموعة الحل الأساسية للمعادلة التفاضلية المتجانسة ذات العلاقة . اكتب الحل العام لكل معادلة ، ثم أوجد الحل الذى يحقق الشروط الابتدائية المعطاة :

(7) $y''' + y'' + 3y' - 5y = 2 + 6x - 5x^2;\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -3,$
$y_p(x) = x^2\ ;\quad \{e^x\ ,\ e^{-x}\cos 2x\ ,\ e^{-x}\sin 2x\}$

(8) $x\,y''' - y'' = -2\ ;\ \ y(1) = 2,\ \ y'(1) = -\,y(1)/2,\ \ y''(1) = -2\,y(1),$
$y_p(x) = x^2;\quad \{1\ ,\ x\ ,\ x^2\}$

(9) $u^3\,v''' + u\,v' - v = 3 - \ln u;\ \ v(1) = v'(1) = 3,\ \ v''(1) = 0,$
$v_p(u) = \ln u\ ,\quad \{u\ ,\ u\ln u\ ,\ u\,(\ln u)^2\}$

(10) $y^{(4)} + 4y = 5\cos x;\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1,\ y''(0) = -\,2,$
$y_p(x) = \cos x\ ;\quad \{e^x\cos x\ ,\ e^x\sin x\ ,\ e^{-x}\cos x\ ,\ e^{-x}\sin x\}$

٥-٦ المؤثر التفاضلي

إذا رمزنا بـ D لعملية الاشتقاق بالنسبة للمتغير x، وإذا رمزنا بـ D^2 لعملية الاشتقاق مرتين بالنسبة للمتغير x ، وإذا استمرينا على هذا المنوال فإن D^k ترمز للاشتقاق k من المرات . أي أن

$$D^k y = \frac{d^k y}{dx^k}$$

ومن ثم يتلخص تأثير D^k على y في اشتقاقه بالنسبة للمتغير x عدد k مرة . هذا على إفتراض أن y قابلة للاشتقاق عدداً من المرات لا يقل عن k .

تعريف. يُوصف المقدار

$$A = a_0 D^n + a_1\, D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n \qquad (1)$$

بأنه مؤثر تفاضلي من الرتبة n . ويمكن تعريفه أيضا بأنه ذلك المؤثر الذي يؤثر على المقدار y فيكون الناتج

$$Ay = a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y \qquad (2)$$

حيث $\{a_0 , a_1 , \ldots , a_n\}$ مجموعة من الثوابت الاختيارية .

ملحوظة . من الممكن أن تكون $\{a_0 , a_1 , \ldots , a_n\}$ دوالّ تابعة للمتغير x لكننا سنتناول هنا الحالات التي يكون فيها $\{a_0 , a_1 , \ldots , a_n\}$ ثوابت اختيارية فقط .

تعريف . يقال أن المؤثرين التفاضليين A , B متساويان ، ويرمز لذلك بالمعادلة $A = B$ إذا وفقط إذا تساوى حاصل تأثير كل من A و B على أي دالّة y . وبمعنى آخر لا بد أن يكون لدينا $Ay = By$ لجميع الدوالّ y القابلة للاشتقاق لدرجة مساوية لرتب الاشتقاق في كل من A , B .

ويُعَرف حاصل ضرب مؤثرين تفاضليين AB بانه ذلك المؤثر التفاضلي الذي يؤدي إلى نفس المحصلة الناتجة عن تأثير المؤثر التفاضلي B يعقبه المؤثر التفاضلي A ، ويكتب ذلك رياضيا على النحو التالي

$$ABy = A(By)$$

ملحوظة . بالنسبة للمؤثرات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة $\{a_0 , a_1 , \ldots , a_n\}$ فإننا نحصل دوما على النتيجة $AB = BA$ ، وهي غير صحيحة دائما عندما تكون المعاملات $\{a_0 , a_1 , \ldots , a_n\}$ متغيرة .

مثال ١. إذا كان

$$A = D - 2 \quad , \quad B = 2D - 3$$

فإن

$$By = (2D - 3)y = 2 \frac{dy}{dx} - 3y$$

وبالتالي فإن

$$ABy = A(By) = (D-2)\left(2\frac{dy}{dx} - 3y\right)$$
$$= 2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 4\frac{dy}{dx} + 6y$$
$$= 2\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 6y$$

ومن ثم يكون لدينا

$$AB = 2D^2 - 7D + 6$$

أما

$$BAy = B(Ay) = (2D-3)\left(\frac{dy}{dx} - 2y\right)$$
$$= 2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 4\frac{dy}{dx} + 6y$$
$$= (2D^2 - 7D + 6)y$$

ومن ثم

$$BA = 2D^2 - 7D + 6 = AB$$

مثال ٢. إذا كان

$$H = 2D + x \quad , \quad G = D - 2x$$

فإن

$$GHy = (D-2x)\left(2\frac{dy}{dx} + xy\right)$$
$$= \frac{d}{dx}\left(2\frac{dy}{dx} + xy\right) - 2x\left(2\frac{dy}{dx} + xy\right)$$
$$= 2\frac{d^2y}{dx^2} + y + x\frac{dy}{dx} - 2x\frac{dy}{dx} - 2x^2y$$
$$= (2D^2 - xD - 2x^2 + 1)y$$

لذا فإن

$$GH = 2D^2 - xD - 2x^2 + 1$$

وبالمقابل فإن

$$HGy = (2D+x)(D-2x)y = (2D+x)\left(\frac{dy}{dx} - 2xy\right)$$
$$= 2D^2y - 4y - 2x\,Dy + x\,Dy - 2x^2y$$
$$= \left(2D^2 - x\,Dy - 2x^2 - 4\right)y$$

ومن ثم

$$HG = 2D^2 - x\,Dy - 2x^2 - 4 \neq GH$$

ومن الواضح أن عدم المساواة بين حاصلي الضرب ناجم عن إحتواء كل من المؤثرين G , H على معاملات غير ثابتة .

وقبل أن ننتقل إلى البند التالي ، فإننا سنستعرض القوانين الأساسية للعمليات الجبرية بين المؤثرات التفاضلية . وليكن A , B, C ثلاثة مؤثرات تفاضلية، ولتكن عمليتا الجمع والضرب كما عرفناها آنفا ، عندها تخضع المؤثرات التفاضلية للقوانين التالية :

(أ) قانون الجمع التبادلي : $A + B = B + A$

(ب) قانون المشاركة الجمعي : $(A + B) + C = A + (B + C)$

(ج) قانون المشاركة الضربي : $(AB)C = A(BC)$

(د) قانون الضرب التوزيعي بالنسبة للجمع : $A(B + C) = AB + AC$

(هـ) قانون الضرب التبادلي : $AB = BA$

شريطة أن تكون كلٌ من A , B, C ذات معاملات ثابتة لا متغيرة كما أشرنا إلى ذلك في الصفحتين السابقتين .

وهكذا فإن المؤثرات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة تخضع لجميع قوانين العمليات الجبرية التي تخضع لها كثيرات الحدود بالنسبة للجمع والضرب . أما بالنسبة للمؤثرات التفاضلية بصفة عامة فهي تخضع للقوانين الأربعة الأولى على أقل تقدير .

ويمكننا أن نجد حاصل جمع أو طرح مؤثرين تفاضليين دون الحاجة إلى دراسة تأثيرهما على متغير ما ، وإنما يُكتفى بجمع الحدود المتشابهة التي تحتوي على

نفس درجة التفاضل . فمثلا لو أن

$$A = 2D^3 - 3D^2 + D - 2$$

و

$$B = xD^3 + 2D^2 - x^2 D + 1$$

فإن

$$A + B = (x+2)D^3 - D^2 + \left(1 - x^2\right)D - 1$$

بينما

$$A - B = (2 - x)D^3 - 5D^2 + \left(1 + x^2\right)D - 3$$

ويمكن لنا أيضا أن نتعامل مع المؤثرات التفاضلية على أنها مؤثرات خطية ، فلو كان A مؤثرا تفاضليا ، وكانت c_1 , c_2 ثوابت اختيارية . وكانت f_1 ,f_2 دالّتين في x قابلتين للاشتقاق عددا من المرات لا يقل عن رتبة A ، فإن

$$A\left(c_1 f_1 + c_2 f_2\right) = c_1\, Af_1 + c_2\, Af_2$$

وملاحظة أخيرة بالنسبة للمؤثرات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة حيث أننا قد أشرنا إلى خضوعها لجميع القوانين الجبرية التي تخضع لها كثيرات الحدود بالنسبة للجمع والضرب . وبناءً على هذا فإنه بإمكاننا أن نطبق عليها جميع العمليات الجبرية البسيطة كالقسمة التحليلية مثلا ، وذلك لإختصار المؤثرات ذات المعاملات الثابتة .

تمارين

أوجد حاصل الضرب في التمارين الخمسة التالية :

(1) $(4D+1)(D-2)$

(2) $(3D-1)(2D-3)$

(3) $\left(D^2-1\right)(D+2)$

(4) $(D-1)^2(2D+1)$

(5) $\left(D^2-3D+2\right)(D-1)$

حلل كلا من المؤثرات التفاضلية التالية :

(6) $2D^2 + 3D - 2$

(7) $2D^2 - 5D - 12$

(8) $D^3 - 21D + 20$

(9) $D^4 - 9D^2$

(10) $D^3 - 2D^2 - 5D + 6$

(11) $D^4 + D^3 - 2D^2 + 4D - 24$

(12) $D^3 - 4D^2 + 5D - 2$

(13) $D^4 - 2D^3 + 3D^2 - 4D + 2$

(14) $D^3 - 11D - 20$

(15) $2D^4 + 11D^3 + 18D^2 + 4D - 8$

(16) $D^4 - 8D^2 - 9$

(17) $D^3 - 27$

أوجد حاصل ضرب كلاً من التالي :

(18) $(D - x)(D + x)$

(19) $(D + x)(D - x)$

(20) $D(xD - 1)$

(21) $(xD - 1)D$

(22) $(xD + 1)(xD - 1)$

(23) $(xD - 1)(xD + 2)$

٥-٧ المزيد من المؤثر التفاضلي

تعريف. لتكن $y = y(x)$ دالّة قابلة للاشتقاق n من المرات على الأقل . وليكن

$$f(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n \qquad (1)$$

مؤثرا تفاضليا يحقق المعادلة

$$f(D)y = \left(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n\right) y = 0$$

عندها نقول بأن المؤثر التفاضلي $f(D)$ يلاشي الدالّة y .

مثال ١ . اذا كانت $y = k$ حيث k ثابت ، وكانت $f(D) = D$ ، فإن $Dk = 0$ ، وكذلك $D^2 x = D^3 x^2 = 0$ وهكذا . وبصفة عامة فإن D^n تلاشي كلا من الدوالّ

$$1 , x , x^2 , x^3 , \dots , x^{n-1}$$

ولهذا (وحيث أن الاشتقاق عملية توزيعية) ، فإن أي كثيرة حدود على الصورة

$$c_0+ c_1 x + c_2 x^2+ \ldots+ c_{n-1} x^{n-1}$$

يمكن ملاشاتها عن طريق إيجاد مؤثر تفاضلي يلاشي الحد ذا الأس الأكبر لكثيرة الحدود .

أما إذا كانت $y = e^{mx}$ وكانت $f(D) = D^k$ حيث k عدد صحيح موجب ، فإن

$$f(D)y = D^k \; e^{mx} = m^k \, e^{mx} \qquad (2)$$

ولذا يمكن بسهولة إيجاد تأثير أي مؤثر تفاضلي على e^{mx} فلو كانت $f(D)$ معطاة بالمعادلة (1) أعلاه ، فإن

$$\begin{aligned} f(D)\, e^{mx} &= a_0 m^n e^{mx} + a_1 m^{n-1} e^{mx} + \ldots + a_n e^{mx} \\ &= e^{mx} \left(a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \ldots + a_n \right) \end{aligned}$$

أي أن

$$f(D)\, e^{mx} = e^{mx} f(m) \qquad (3)$$

ولو كانت m جذرا للمعادلة $f(m) = 0$ لحصلنا بموجب المعادلة (3) على

$$f(D)\, e^{mx} = 0$$

ومن هنا نستنتج القاعدة التالية :

القاعدة ١. لو كانت $f(D)$ معطاة بالمعادلة (1) وكانت m جذرا للمعادلة $f(m) = 0$ ، فإن $f(D)$ تلاشي الدالّة e^{mx} .

والآن لننظر إلى مدى تأثير المؤثر التفاضلي $D - a$ على حاصل ضرب الدالّة e^{ax} في أي دالّة y قابلة للاشتقاق حيث a ثابت اختياري

$$(D-a)(e^{ax} y) = D(e^{ax} y) - a\, e^{ax} y = e^{ax} Dy$$

وكذلك

$$(D-a)^2 (e^{ax} y) = (D-a)(e^{ax} Dy) = e^{ax} D^2 y$$

وهكذا بتكرار هذه العملية نجد أن

$$(D-a)^n\left(e^{ax}\,y\right)=e^{ax}D^n y \qquad (4)$$

ولأن المؤثرات التفاضلية تحقق خاصية الخطية linearity property ، وعندما تكون $f(D)$ كثيرة حدود في D وذات معاملات ثابتة ، فإنه تكون لدينا القاعدة التالية :

القاعدة ٢ . ليكن a أي ثابت اختياري ، ولتكن $f(D)$ مؤثراً تفاضلياً ذا معاملات ثابتة . ولتكن y دالة قابلة للاشتقاق عدد مرات لا يقل عن رتبة $f(D)$ ، عندها يكون

$$f(D-a)\left[e^{ax}\,y\right]=\ e^{ax}f(D)y$$

مثال ٢. لتكن

$$f(D)=2D^2-5D+2$$

بحل المعادلة

$$f(m)=2m^2-5m+2=0$$

أو

$$(2m-1)\,(m-2)=0$$

نجد أن جذري المعادلة هما $m=2$, $m=1/2$. وباستعمال القاعدة ١ يمكننا أن نقول إن :

$$f(D)\,e^{2x}=0$$

وإن

$$f(D)\,e^{x/2}=0$$

أي أن

$$y_1=\ e^{2x}\ ,\ \ y_2=\ e^{x/2}$$

يشكلان حلين للمعادلة التفاضلية

$$f(D)y\ =\left(2D^2-5D+2\right)y=0$$

مثال ٣. اثبت أن

$$(D-m)^n\left(x^k e^{mx}\right)=0 \qquad (5)$$

حيث k عدد صحيح غير سالب وأقل من n .

الحل : بتطبيق القاعدة ٢ واختيار $f(D)=D^n$ و $y=x^k$ نحصل على

$$(D-m)^n\left(x^k e^{mx}\right)=e^{mx}D^n x^k = 0$$

لأن $D^n x^k=0$ لجميع قيم k غير السالبة والأقل من n .

هذا ويمكن اعتبار المعادلة (5) *قاعدة ثالثة* في هذا البند ، وتشكل هذه المعادلة مع القاعدتين ١ ، ٢ ركيزة أساسية هامة يُعتمد عليها إلى حد كبير في صياغة طرق حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة ، والتي سندرسها بشيء من التفصيل في الباب القادم إن شاء الله .

مثال ٤ . في هذا المثال البسيط نستعرض أهمية قاعدة الإزاحة الأسية (قاعدة ٢) في حل بعض المعادلات التفاضلية دونما كبير عناء . لنفترض أن لدينا المعادلة التفاضلية

$$(D-2)^3 y=0 \qquad (6)$$

لو ضربنا المعادلة في المقدار e^{-2x} لحصلنا على

$$e^{-2x}\,(D-2)^3 y=0$$

وبتطبيق القاعدة ٢ حيث $a=-2$ ، $f(D)=(D-2)^3$ ومن ثم $f(D-a)=D^3$ ، ومن ثم نحصل على

$$0=e^{-2x}\,(D-2)^3 y = D^3\left(e^{-2x}y\right)$$

أو

$$D^3\left(e^{-2x}y\right)=0 \qquad (7)$$

ثم نكامل المعادلة ثلاث مرات لنصل إلى

$$e^{-2x}y=c_1+c_2\,x+c_3x^2$$

وبالضرب في e^{2x} نصل إلى الحل النهائي العام

$$y = \left(c_1 + c_2\, x + c_3 x^2\right) e^{2x}$$

مع ملاحظة أن كلا من الدوال e^{2x} , $x\, e^{2x}$, $x^2 e^{2x}$ يمثل حلا للمعادلة (6) وذلك بتطبيق القاعدة ٣ والتي تمثلها المعادلة (5). أما الاستقلال الخطي فبرهانه متروك للقارئ (أنظر تمرين ١ بند ٥-٣) .

تمارين

فيما يلي استعمل القاعدة ٢ كما فعلنا في المثال الأخير لإيجاد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $(D-1)^2 y = 0$

(2) $(D+3)^4 y = 0$

(3) $(2D-3)^3 y = 0$

(4) $(D+2)^5 y = 0$

(5) $(3D+2)^6 y = 0$

(6) $(D-4) y = 0$

(٧) أثبت أن المجموعة

$$\left\{e^{\alpha x}\ , x e^{\alpha x}\ , x^2 e^{\alpha x}\ , \ldots , x^{n-1} e^{\alpha x}\right\}$$

مستقلة خطيا على أي فترة كانت ، وأوجد قيمة الرونسكيان W.

٥-٨ ملخص الباب

قد لا يجانبنا الصواب إن قلنا إن هذا الباب لم يقدم الشئ الكثير نحو معالجة فعلية لأنواع جديدة من المعادلات التفاضلية وإيجاد حلولها كما كان الحال في البابين الثاني والرابع . ولكن الواقع أن هذا الباب قدم أسسا كثيرة وركائز هامة ننطلق منها نحو الأبواب القادمة ، وفي جعبتنا الحصيلة الكافية والتنظير اللازم الضروريان لبناء استيعاب كامل ومتكامل لما ستعرضه البنود القادمة من طرق لحل المعادلات التفاضلية الخطية .

هذا ويمكننا أن نعتبر هذا الباب مساندا للأبواب القادمة ومموّنا لها بالنظرية اللازمة ، كما يمكن تلخيص هذا الباب على النحو التالي :

أولا : أي تشكيل خطي من حلول معادلة تفاضلية خطية متجانسة يشكل حلا للمعادلة نفسها.

ثانيا: إذا كان لدينا المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \dots + P_n y = R$$

فإن نظرية وجود الحل ووحدانيته تؤكد وجود حل وحيد في ظل الفرضيات التي تضعها النظرية كما جاءت في البند ٥-٢ . وهذا الحل يحقق الشروط الابتدائية التالية عند النقطة x_0

$$y(x_0) = y_0 , \quad y'(x_0) = y_1 , \dots , y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

ثالثا : في نفس البند ٥-٢ تم تعريف الاستقلال الخطي وعكسه لمجموعة من الدوال المعرفة على فترة معينة . وفي البند الذي يليه تم تعريف مقدار مرتبط بهذه المجموعة يُسمى الرونسكيان نسبة للعالم البولندي رونسكي .

رابعا : إذا علمنا مجموعة من حلول معادلة تفاضلية خطية متجانسة

$$y^{(n-1)} + P_1 y^{(n-1)} + \dots + P_n y = 0$$

فإنه بإمكاننا أن نستدل على الاستقلالية الخطية لهذه الحلول إذا كان الرونسكيان التابع لها يختلف عن الصفر ، وذلك بعد تحقق بقية الشروط الأخرى (انظر نظرية ٢ وكذلك نظرية ٣) .

خامسا : من أهم نتائج البند الرابع من هذا الباب تلك المتعلقة بصيغة الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ، والتي تنص على أنه إذا كانت المجموعة $\{y_1 , y_2 , \dots , y_{n-1} , y_n\}$ تمثل حلولا مستقلة خطيا للمعادلة التفاضلية

$$b_0 y^n + b_1 y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} y' + b_n y = 0$$

حيث جميع الدوال b_k معرفة على الفترة (a , b) ومتصلة عليها أيضا إضافة إلى كون b_0 لا تساوي الصفر لأي قيمة في الفترة (a , b)، فإن الحل العام عندئذ يكون

على النحو

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

حيث $\{c_1 , \dots , c_n\}$ ثوابت اختيارية (أنظر نظرية ٤) .

سادسا : لو كانت b_k كما هي معرفة أعلاه ، و كانت y_p حلا للمعادلة التفاضلية

$$b_0 y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \dots + b_n y = R$$

لكان الحل العام على النحو

$$y = y_c + y_p$$

حيث

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

هذا وقد أسمينا y_c الدالّة المكملة بينما أسمينا y_p الحل الخاص (نظرية ٥) .

سابعا : درسنا في البند السادس مصطلح المؤثر التفاضلي كما درسنا بعض القوانين الجبرية التي تربط بين المؤثرات التفاضلية . وفي البند الذى يليه استعرضنا ثلاث قواعد رئيسية تربط بين المؤثرات التفاضلية والدوال الأسية وأشرنا إلى مدى أهميتها بالنسبة لما سيليها من أبواب تتناول طرقا جديدة لحل بعض أنواع المعادلات التفاضلية .

الباب السادس

المعادلات الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة

■ مقدمة ■ المعادلة المساعدة : تعريفها وأهميتها ■ المعادلة المساعدة ذات الجذور المختلفة ■ المعادلة المساعدة ذات الجذور المكررة ■ المعادلة المساعدة ذات الجذور المركبة ■ ملخص الباب ■ تمارين عامة .

٦-١ مقدمة

في هذا الباب سنستعرض عدة طرق تقليدية لحل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة . وحتى نعطي القارئ صورة مبسطة لما سيلي هذه المقدمة من مادة ، فسنبدأ بمعادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية ، ولتكن هذه المعادلة على الصورة التالية :

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (1)$$

حيث a, b, c ثوابت حقيقية و $a \neq 0$. وحيث أن هذه الثوابت تُعد دوالاً متصلة على أي فترة ، فبإمكاننا تطبيق نظريات الباب السابق لنستدل على ضرورة وجود حلول للمعادلة (1) لجميع قيم x الحقيقية . ولو أمكننا إيجاد حلين مستقلين خطيا للمعادلة (1) ولنرمز لهما بالرمزين y_1 , y_2 ، فعندئذ يمكن القول بأن الحل العام للمعادلة يجب أن يكون على الشكل

$$y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية .

وبالقاء نظرة فاحصة على المعادلة (1) يتبين لنا أن أي حل لها يجب أن يستوفي الخاصية التالية : حاصل ضرب المقدار الثابت a في الاشتقاق الثاني للحل مضافاً إليه المقدار الثابت b في الاشتقاق الأول للحل زائدا المقدار الثابت c في الحل نفسه يساوي صفرا . هذه الخاصية تدفعنا إلى اقتراح حل من النوع $y = e^{\alpha x}$ لأن أي اشتقاق لهذا النوع من الدوال يساوي مقدارا ثابتا في الدالّة نفسها. وإذا ما جربنا هذا الاقتراح وذلك بالتعويض في المعادلة (1) فسنحصل على

$$a\alpha^2 e^{\alpha x} + b\alpha e^{\alpha x} + c e^{\alpha x} = 0$$

أو

$$e^{\alpha x}\left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) = 0$$

وحيث أن $e^{\alpha x}$ لا تساوي الصفر أبدا ، فإنه يمكن القسمة عليها لنتوصل إلى

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \qquad (2)$$

ومن ثم نستنتج أن $y = e^{\alpha x}$ يمثل حلا للمعادلة (1) إذا وفقط إذا حققت α المعادلة (2) والتي نطلق عليها المعادلة المساعدة لأنها تساعد حقيقة في إيجاد الحل المناسب.

٦-٢ المعادلة المساعدة : تعريفها وأهميتها

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة

$$\left(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n\right) y = 0 \qquad (1)$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل المختصر

$$f(D) y = 0 \qquad (2)$$

حيث $f(D)$ يمثل مؤثرا تفاضليا خطيا . وكما علمنا من القاعدة ١ في البند ٥-٦ ، فإنه إذا كانت m جذرا للمعادلة $f(m) = 0$ ، فإن

$$f(D)\, e^{mx} = 0$$

وهذا يعني بوضوح أن الدالة $y = e^{mx}$ تعتبر حلا للمعادلة التفاضلية (2) .

تعريف. المعادلة المساعدة المرتبطة بالمعادلة (1) أو (2) هي

$$f(m) = a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \dots + a_{n-1} m + a_n = 0 \qquad (3)$$

وهي معادلة من الدرجة n لأن $a_0 \neq 0$.

ولأن الدالة $f(m)$ في (3) عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة n ، فلا بد أن يكون لهذه المعادلة n من الجذور . وهذه الجذور قد تكون حقيقية أو قد تكون مركبة ، ومنها ما يكون مختلفا أو قد يكون مكررا .

وسنعالج في البنود الثلاثة القادمة هذه الحالات المختلفة ، كما سنرى كيف نختزل عملية إيجاد حل للمعادلة (1) التي تبدو معقدة وصعبة إلى عملية جبرية محضة تتلخص في إيجاد جذور المعادلة (3) بالطرق المختلفة التي نعلمها من مواد رياضية سابقة .

٦-٣ المعادلة المساعدة ذات الجذور المختلفة

إذا كانت المعادلة المساعدة

$$f(m) = 0$$

ذات جذور حقيقية مختلفة ، ولتكن $m_1, m_2, \dots, m_n$ ، فإن مجموعة الدوال

$$y_1 = e^{m_1 x},\ y_2 = e^{m_2 x},\ \dots,\ y_n = e^{m_n x}$$

تمثل حلولا مستقلة خطيا للمعادلة $f(D)y = 0$ ، ويمكن كتابة الحل العام للمعادلة على الصورة

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots + c_n e^{m_n x}$$

حيث $c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n$ ثوابت اختيارية .

مثال ١. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' + 5y' - 6y = 0 \qquad (1)$$

الحل : المعادلة المساعدة المرتبطة بالمعادلة (1) هي

$$m^2 + 5m - 6 = 0$$

أو

$$(m - 1)(m + 6) = 0$$

ومنها يكون للمعادلة جذران هما $m = 1,\ m = -6$. وبالتالي فالحل العام هو

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-6x}$$

مثال ٢. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y''' - y'' - 4y' + 4y = 0 \qquad (2)$$

الحل : نعيد كتابة المعادلة (2) في الصورة $f(D)y = 0$ ، أي على النحو

$$(D^3 - D^2 - 4D + 4)y = 0$$

ومنه نحصل على المعادلة المساعدة

$$m^3 - m^2 - 4m + 4 = 0$$

وباختبار المعادلة نجد أن $m_1 = 1$ يحقق المعادلة ، أي أنه جذر لها وذلك يعني أن $f(m)$ قابلة للقسمة على $m - m_1 = m - 1$ ، وبإجراء القسمة العادية الكسرية نحصل على

$$f(m) = (m-1)(m^2 - 4)$$

$$= (m-1)\,(m-2)\,(m+2)$$

وبالتالي يكون للمعادلة المساعدة جذران آخران هما $m_2 = 2, m_3 = -2$ ، ولذا فالحل العام للمعادلة هو

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$$

مثال ٣. أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$(D^2 - 2D - 3)y = 0$$

الذي يحقق الشرطين الابتدائيين $y(0) = 0, y'(0) = -4$.

الحل : باستخدام المعادلة المساعدة نجد أن الحل العام هو

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$$

وبإجراء الاشتقاق الأول

$$y' = -c_1 e^{-x} + 3c_2 e^{3x}$$

وبالتعويض في هاتين المعادلتين عندما $x = 0$ نجد أن

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0$$

$$y'(0) = -c_1 + 3\,c_2 = -4$$

ومنه نحصل علي الحل الآني $c_1 = 1\ ,\ c_2 = -1$ ، وبالتالي فالحل المطلوب هو

$$y = e^{-x} - e^{3x}$$

تمارين

فيما يلي أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $(D^2 - D - 2)y = 0$

(2) $(D^2 + 4D + 3)y = 0$

(3) $y'' - 3y' - 10y = 0$

(4) $(D^2 + D - 6)y = 0$

(5) $y''' + 2y'' - 8y = 0$

(6) $(D^3 - 8D^2 + 15D)y = 0$

(7) $(D^3 - D^2 - 4D + 4)y = 0$

(8) $(D^3 + D^2 - 9D + 9)y = 0$

(9) $(4D^3 - 13D + 6)y = 0$

(10) $(6D^3 + 11D^2 - 12D - 5)y = 0$

(11) $y''' - 2y'' - 3y' = 0$

(12) $4y''' - 49y' - 60y = 0$

(13) $(4D^3 - 15D^2 + 5D + 6)y = 0$

(14) $(D^4 + 2D^3 - 13D^2 + 38D - 24)y = 0$

(15) $(6D^4 + 23D^3 + 28D^2 + 13D + 2)y = 0$

(16) $(4D^4 + 45D^2 - 70D - 24)y = 0$

(17) $(6D^5 - 3D^4 - 5D^3 - 15D^2 - 4D - 12)y = 0$

(18) $[D^2 - (a+b)D + ab]y = 0$ حيث a , b ثابتان حقيقيان غير متساويين

فيما يلي أوجد الحل الخاص الذى يحقق الشروط الابتدائية المعطاة لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

(19) $(D^2 - D - 6)y = 0; \quad y(0) = 0 , y(1) = e^3$

(20) $(D^2 - 2D - 3)y = 0; \quad y(0) = 4 , y'(0) = 0$

(21) $(D^3 - 4D)y = 0; \quad y(0) = y'(0) = 0 , y''(0) = 2$

(22) $y'' + 2y' - y = 0; \quad y(0) = 0 \;,\; y'(0) = -1$

(23) $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -7, \; y''(0) = -1$

٦-٤ المعادلة المساعدة ذات الجذور المكررة

لنبدأ مرة أخرى بالمعادلة

$$f(D)y = 0 \qquad (1)$$

ولنفترض أن تحليل $f(D)$ إلى عوامله الأولية أنتج لنا عاملا مكررا ، أي أن المعادلة المساعدة $f(m) = 0$ لديها جذر مكرر أكثر من مرة ، وليكن هذا الجذر α . ولنقل جدلا أنه مكرر مرتين ، أي أن $m_1 = m_2 = \alpha$ ، وأنهما الجذران الوحيدان للمعادلة المساعدة ، بمعنى أن $f(m) = 0$ معادلة من الدرجة الثانية على الهيئة

$$k\,(m - \alpha)^2 = 0$$

حيث k أي ثابت اختياري . لو أردنا أن نطبق طريقة البند السابق لقلنا فورا إن الحل العام للمعادلة (1) هو

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\alpha x}$$

ولكن c_1 , c_2 ثابتان اختياريان ينتج عن جمعهما ثابت اختياري جديد هو c .

$$y = (c_1 + c_2)\, e^{\alpha x} = c\, e^{\alpha x}$$

وبالتالي يكون لدينا حل واحد فقط مقابل جذرين للمعادلة المساعدة ، وهذا يعني تماما أن الحلين الناتجين عن الجذرين المكررين غير مستقلين خطيا ، وهو ما يجب أن نتفاداه لأننا نعلم أنه يجب أن يكون لدينا حلان مستقلان خطيا.

إذا نحن نسعى في هذه الحالة إلى البحث عن طريقة تضمن لنا الحصول على n من الحلول المستقلة خطيا عندما يكون للمعادلة المساعدة جذر حقيقي α تكرر عدد j من المرات حيث $j \le n$. ولتكن

$$m_1 = m_2 = \dots = m_j = \alpha$$

عندها سيكون $(m - \alpha)^j$ أحد عوامل $f(m)$ ، وبالتالي $(D - \alpha)^j$ أحد عوامل المؤثر التفاضلي $f(D)$. المطلوب الآن أن نجد j من الحلول المختلفة $\{y_1 , y_2 , \dots , y_j\}$

المستقلة خطيا بحيث يتحقق لدينا

$$(D-\alpha)^j y_k = 0 \qquad (2)$$

حيث $k = 1,\ 2,\ \dots,\ j$.

ولنعد بالصفحات قليلا إلى الخلف إلى المعادلة (5) من البند ٥-٧ والتي تمثل القاعدة الثالثة من قواعد ذلك البند ، وبإحلال α محل الجذر المتكرر m نجد

$$(D-\alpha)^j\,(x^k e^{\alpha x}) = 0 \qquad (3)$$

حيث $k = 0, 1, \dots, j-1$ ، ويبدو أننا قد حصلنا على بغيتنا من المعادلة فالدوال

$$y_{k+1} = x^k e^{\alpha x}$$

حيث $k = 0, 1, \dots, j-1$ والتي يبلغ عددها j مستقلة خطيا (أنظر تمرين ٧ في نفس البند) وكل منها يمثل حلا للمعادلة (2). وبالتالي فالحل العام للمعادلة هو

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\alpha x} + \dots + c_j x^{j-1} e^{\alpha x} \qquad (4)$$

ومن جهة أخرى لو كان $(D-\alpha)^j$ عاملا من عوامل تحليل $f(D)$، فإن المعادلة

$$f(D)y = 0 \qquad (5)$$

يمكن إعادة كتابتها على الشكل

$$g(D)\,(D-\alpha)^j\,y = 0 \qquad (6)$$

حيث تتكون $g(D)$ من حاصل ضرب جميع العوامل الأولية للمؤثر $f(D)$ عدا $(D-\alpha)^j$ ، وفي هذه الحالة يكون أي حل للمعادلة

$$(D-\alpha)^j\,y = 0 \qquad (2)$$

هو حل للمعادلة (6) ، وبالتالي يكون حلا للمعادلة (5) التي ابتدأنا بها أصلا .

وهكذا ، وبنهاية هذا النقاش نكون قد وصلنا إلى مرحلة تسمح لنا بكتابة الحل العام للمعادلة (1)

$$f(D)y = 0$$

طالما كان للمعادلة المساعدة $f(m) = 0$ جذور حقيقية بغض النظر عن اختلافها أو تكرارها ، ذلك أن أي جذر للمعادلة المساعدة إما أن يكون مختلفا عن جميع الجذور الأخرى أو يكون عنصرا في مجموعة من الجذور المتكررة . فعندما يكون الجذر

مختلفا عن بقية الجذور الأخرى ، وليكن هذا الجذر m_1 ، فإن هناك حلا مرتبطا به ومستقلا خطيا عن بقية الحلول الأخرى ، ولنرمز له بالرمز y_i حيث

$$y_i = c_i\ e^{m_i x}$$

أما عندما يكون لدينا j من الجذور المتساوية

$$m_1 = m_2 = \dots = m_j = \alpha\ ,\ \ (j \le n)$$

فإن مجموعة الحلول

$$e^{\alpha x}\ ,\ x\,e^{\alpha x}\ ,\ \dots,\ x^{j-1}\ e^{\alpha x}$$

تمتاز باستقلالها الخطي وبتساويها في العدد مع عدد مرات تكرار الجذر α . ومن ثم يكون لدينا حل مستقل مقابل كل جذر من جذور المعادلة المساعدة سواء كان الجذر مختلفا او متكررا .

مثال ١. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y''' + 3y'' - 4y = 0 \qquad (7)$$

الحل : نكتب المعادلة المساعدة

$$m^3 + 3m^2 - 4 = 0$$

فنجد أن $m_1 = 1$ هو أحد جذورها ، وبقسمة $f(m)$ على العامل الأولي $m - 1$ نجد أن

$$m^3 + 3m^2 - 4 = (m - 1)\,(m + 2)^2$$

أي أن للمعادلة المساعدة جذران متساويان أو جذر متكرر هو -2 . وبتلخيص الوضع لمزيد من الترتيب والوضوح نكتب الجذور على النحو التالي :

$$m_1 = 1\ ,\ m_2 = m_3 = -2$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة (7) هو

$$y = c_1 e^{x} + c_2\ e^{-2x} + c_3\ x\,e^{-2x}$$

مثال ٢. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\left(D^5 - 16D^3\right)y = 0$$

الحل : نكتب المعادلة المساعدة

$$m^5 - 16m^3 = m^3(m^2 - 16) = 0$$

والتي لها الجذور الخمسة

$$m_1 = m_2 = m_3 = 0,\ m_4 = 4,\ m_5 = -4$$

وبالتالي فالحل العام للمعادلة هو

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{4x} + c_5 e^{-4x}$$

تمارين

فيما يلي أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $(D^2 - 2D + 1)y = 0$

(2) $4y'' - 4y' + y = 0$

(3) $(D^3 + 6D^2 + 9D)y = 0$

(4) $(9D^3 + 6D^2 + D)y = 0$

(5) $(2D^4 - 3D^3 - 2D^2)y = 0$

(6) $(D^4 - 2D^2 + 1)y = 0$

(7) $y''' + 3y'' - 4y = 0$

(8) $(D^3 - 4D^2 + 3D - 1)y = 0$

(9) $(D^5 - 25D^3)y = 0$

(10) $(4D^4 + 4D^3 - 3D^2 - 2D + 1)y = 0$

(11) $(4D^4 - 4D^3 - 23D^2 + 12D + 36)y = 0$

(12) $(D^5 + 5D^4 - 2D^3 - 10D^2 + D + 5)y = 0$

(13) $(D^4 - 5D^2 - 6D - 2)y = 0$

فيما يلي أوجد الحل الخاص الذي يحقق شروط المسألة الابتدائية :

(14) $y'' + 6y' + 5y = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3$

(15) $y'' - 3y' + 2y = 0;\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1$

(16) $y'' + 4y' + 4y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

(17) $y'' + 4y' + 4y = 0;\ y(0) = 2\ ,\ y(2) = 0$

(18) $y''' + 12y'' + 36y' = 0;\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1,\ \ y''(0) = -7$

(19) $(D^4 + 3D^3 + 2D^2)y = 0;\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 3;\ y''(0) = -5\ \ ,\ y'''(0) = 9$

(20) $(D^4 - 3D^3 + 3D^2 - D)y = 0\ ;\ y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = y'''(0) = 1$

فيما يلي أوجد قيمة y عندما $x = 2$:

(21) $(4D^2 - 4D + 1)y = 0;\ y(0) = -2\ ,\ \ y'(0) = 2$

(22) $(D^3 + 2D^2)y = 0;\ y(0) = -3\ ,\ \ y'(0) = 0,\ \ y''(0) = 12$

٦-٥ المعادلة المساعدة ذات الجذور المركبة

تناولنا في البندين السابقين المعادلة التفاضلية

$$f(D)y = 0 \qquad (1)$$

عندما تكون المعادلة المساعدة المرتبطة بها ذات جذور حقيقية سواءً كانت مختلفة أو مكررة . وفي هذا البند سنتناول الحالة الوحيدة المتبقية ، وهي التي تشمل الجذور المركبة للمعادلة المساعدة . وقد لا يكون الإختلاف كبيرا هنا ، وإنما ينحصر الاختلاف في تعريف الدالّة الأسية e^z عندما يكون z عددا مركبا. ولذا وجب أن نبدأ بإزالة هذا الغموض النسبي في تعريف e^z . ولتكن $z = \alpha + i\,\beta$ حيث α ، β عددان حقيقيان و i كما هو معروف تمثل الجذر التربيعي للمقدار -1 ، وبالتالي فإن

$$e^z = e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}\ e^{i\beta} \qquad (2)$$

حيث e^{α} عدد حقيقي يساوي مقدار الدالّة الأسية عندما $x = \alpha$. وبصورة أكثر تحديدا نحن نعلم أن

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

أو

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (3)$$

ومن ثم

$$e^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \qquad (4)$$

ولو عالجنا $e^{i\beta}$ بنفس الطريقة لوجدنا أن

$$e^{i\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\beta)^n}{n!} = 1 + \frac{i\beta}{1!} + \frac{i^2\beta^2}{2!} + \dots + \frac{i^n\beta^n}{n!} + \dots \qquad (5)$$

لكننا ندرك أن

$$i = \sqrt{-1}\,,\ i^2 = -1\,,\ i^3 = -i\,,\ i^4 = 1$$

ومن ثم تتكرر الدورة بانتظام

$$i^5 = i\,,\ i^6 = -1,\ i^7 = -i\,,\ i^8 = 1\,, \dots$$

وعموما فإن $i^{2k} = (-1)^k$ بينما $i^{2k+1} = (-1)^k i$. وبتطبيق هذه القاعدة على المعادلة (5)واسترجاع التعريف الخاص بكل من $\sin\beta\,,\ \cos\beta$ كمتسلسلة أسية نجد أن

$$e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta \qquad (6)$$

هذا ويمكن للقارئ الرجوع إلى Rainville صفحة ١٠٧ لمزيد من التفاصيل .

وعودا إلى المعادلة (2) واستنادا إلى المعادلة (6) يتبين لنا أن

$$e^z = e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha e^{i\beta} \qquad (7)$$

$$= e^\alpha(\cos\beta + i\sin\beta)$$

حيث α, β أعداد حقيقية . وباستبدال β بالمقدار $-\beta$ وتذكر أن

$$\cos(-\beta) = \cos\beta\,,\ \sin(-\beta) = -\sin\beta$$

نصل إلى أن

$$e^{\alpha-i\beta} = e^{\alpha x}(\cos\beta - i\sin\beta) \qquad (8)$$

لنفترض الآن أن

$$y = e^{(\alpha+i\beta)x}$$

حيث α, β, x أعداد حقيقية . عندها سنجد أن

$$\big(D - (\alpha + i\beta)\big)y = 0 \qquad (9)$$

ذلك لأن

$$Dy = \frac{dy}{dx} = (\alpha + i\beta)y$$

وهو ما يحقق المعادلة (9) . وكذلك الحال مع الدالة

$$y = e^{(\alpha-i\beta)x}$$

التي تحقق المعادلة

$$\big(D - (\alpha - i\beta)\big)y = 0 \qquad (10)$$

أما الآن فنعود لموضوعنا الرئيسي ، ولنتناول المعادلة التفاضلية

$$f(D)y = 0 \qquad (1)$$

والتي ترتبط بها معادلة مساعدة ذات معاملات حقيقية فقط . ففي هذه الحالة نعلم مما تعلمناه من مبادىء علم الجبر أن الجذور المركبة لهذه المعادلة لا بد أن تأتي مترافقة ، أي أنه إذا كان

$$m_1 = \alpha + i\beta$$

جذرا للمعادلة المساعدة $f(m) = 0$ حيث α , β حقيقيان و $\beta \neq 0$ ، فإن

$$m_2 = \alpha - i\beta$$

لا بد أن يكون هو الآخر جذرا لنفس المعادلة . هذا ويُسمى m_2 المرافق لـ m_1 ، ولا بد لنا أن نتذكر أن هذه القاعدة صحيحة نتيجة لاشتراطنا أن تكون المعاملات الثابتة في المعادلة $f(m) = 0$ كلها حقيقية . أما إذا كانت بعض المعاملات مركبة فلا يشترط أن تكون الجذور المركبة مترافقة .

ولنقم الآن بكتابة حلول المعادلة (1) المرتبطة بالجذور المركبة للمعادلة $f(m) = 0$ ذات المعاملات الحقيقية فقط . وليكن للمعادلة $f(m) = 0$ الجذران المترافقان

$$m_1 = \alpha + i\beta\ ,\ \ m_2 = \alpha - i\beta$$

عندها وطبقا للمعادلتين (9) ، (10) يمكننا القول بأن الدالة

$$y = c_1\, e^{(\alpha+i\beta)\,x} + c_2\, e^{(\alpha-i\beta)\,x} \qquad (11)$$

تحقق المعادلة (1) وحيث أن x وكذلك $\alpha\ ,\ \beta$ كلها حقيقية فإنه يمكن إعادة كتابة المعادلة (11) على الصورة

$$y = c_1 e^{\alpha x}(\cos\ \beta x + i\ \sin\ \beta x) + c_2 e^{\alpha x}\ (\cos\ \beta x - i\ \sin\ \beta x)$$

وبإعادة ترتيب الحدود نجد أن

$$y = (c_1 + c_2)\, e^{\alpha x} \cos\ \beta x + i\,(c_1 - c_2)\cdot e^{\alpha x}\ \sin\ \beta x$$

وبوضع

$$c_1 +\ c_2 =\ c_3\ ,\ i\,(c_1 - c_2) = c_4$$

يمكننا كتابة الدالة y في الصورة

$$y = c_3\, e^{\alpha x} \cos\ \beta x + c_4\, e^{\alpha x} \sin\ \beta x$$

حيث $c_3\ ,\ c_4$ ثوابت اختيارية .

قاعدة . لتكن $f(m) = 0$ المعادلة المساعدة للمعادلة التفاضلية (1) . ولتكن $f(m)$ ذات معاملات حقيقية فقط . لو افترضنا أن $m_1 = \alpha + i\,\beta$ حيث $\beta \neq 0$ يمثل جذرا للمعادلة $f(m) = 0$ ، فإن المرافق $m_2 = \alpha - i\,\beta$ يمثل جذرا آخر للمعادلة نفسها . أما حل المعادلة (1) المرتبط بهذين الجذرين المركبين فهو

$$y = c_1\, e^{\alpha x} \cos\ \beta x + c_2\, e^{\alpha x} \sin\ \beta x \qquad (12)$$

مثال ١. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\left(3D^3 - 19D^2 + 36D - 10\right)y = 0$$

الحل : من السهل التحقق من أن $m_1 = \dfrac{1}{3}$ جذر حقيقي للمعادلة المساعدة

$$f(m) =\ 3m^3 - 19m^2 + 36m\ - 10 = 0$$

وبالقسمة التحليلية نجد أن

$$f(m) = \left(m - \frac{1}{3}\right)(3m^2 - 18m + 30)$$

$$= (3m - 1)(m^2 - 6m + 10)$$

وباستعمال القانون نجد أن الجذرين الآخرين هما

$$m_2 = 3 + i \ , \ m_3 = 3 - i$$

وبالتالي فالحل العام هو

$$y = c_1 e^{x/3} + c_2 e^{3x} \cos x + c_3 e^{3x} \sin x$$

ملاحظة. الجذور المركبة المكررة تفضي إلى حلول تشبه تلك التي تفضي اليها الجذور الحقيقية المكررة . فمثلا لو أن الجذرين المركبين

$$m_1 = \alpha + i\beta \ , \ m_2 = \alpha - i\beta$$

تكرر ظهورهما مرة أخرى ، فعندها يكون لدينا أربعة حلول خطية مستقلة تكون في مجموعها الحل

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\alpha x} \cos \beta x + (c_3 + c_4 x) e^{\alpha x} \sin \beta x$$

مثال ٢. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^4 + 6D^2 + 9)y = 0$$

الحل : نكتب أولا المعادلة المساعدة

$$f(m) = m^4 + 6m^2 + 9 = 0$$

أو

$$(m^2 + 3)^2 = 0$$

ومنها نجد الجذور المركبة الأربعة $\pm\sqrt{3}\,i$, $\pm\sqrt{3}\,i$ أي أن كلا من الجذرين $m_1 = \sqrt{3}\,i$ و $m_2 = -\sqrt{3}\,i$ قد تكرر ظهوره مرة أخرى ، وحيث أن الجزء الحقيقي α مساو للصفر ، وبالتالي $e^{\alpha x} = 1$ ، فإن الحل العام للمعادلة هو

$$y = (c_1 + c_2 x) \cos \sqrt{3}\,x + (c_3 + c_4 x) \sin \sqrt{3}\,x$$

تمارين

فيما يلي أوجد حلول كل من المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $(D^2-2D+5)y=0$

(2) $(D^2+1)y=0$

(3) $y''-4y'+5y=0$

(4) $(D^2-6D+10)y=0$

(5) $(D^2-4D+7)y=0$

(6) $3y''+2y'+y=0$

(7) $y''+4y'+6y=0$

(8) $y'''-y=0$

(9) $(D^3+D^2-2)y=0$

(10) $(D^4+D^3+D^2)y=0$

(11) $(D^4+2D^3+10D^2)y=0$

(12) $(D^5-16D)y=0$

(13) $(D^5+D^4-7D^3-11D^2-8D-12)y=0$

(14) $(D^4+18D^2+81)y=0$

(15) $(D^6+9D^4+24D^2+16)y=0$

فيما يلي أوجد حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشروط الابتدائية المعطاة :.

(16) $y''+16y=0;\ y(0)=2,\ y'(0)=-y(0)$

(17) $y''+2y'+2y=0;\ y(0)=2,\ y'(0)=y(0)/2$

(18) $y''-2y'+2y=0;\ y(\pi)=e^{\pi},\ y'(\pi)=0$

(19) $y'''+y''+4y'+4y=0;\ \ y(0)=0,\ y'(0)=-1,\ y''(0)=5$

(20) $y'''-8y=0;\ y(0)=0,\ y'(0)=-1,\ y''(0)=0$

٦-٦ ملخص الباب

هذا الباب احتوى على خمسة بنود إضافة إلى هذا الملخص . وكما أشرنا في ملخص الباب الخامس ، فإن هذا الباب هو انطلاقة حقيقية نحو ممارسة فعلية لإيجاد حلول المعادلات الخطية المتجانسة ذات المعاملات الحقيقية الثابتة ، وذلك بتسخير ماتعلمناه في البند الخامس الذى شكل وأرسى القواعد الأساسية لانطلاقة هذا الباب .

وكان البند الأول مقدمة مهدت للبند الثاني الذي ركز على تعريف المعادلة المساعدة والدور الهام الذى تلعبه هذه المعادلة نحو إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة . وقد تمت دراسة الحالات المختلفة لجذور هذه المعادلة في البنود الثلاثة التالية . وفيما يلي نعطي ملخصا موجزا لما تناوله هذا الباب :

أولا : تناول هذا الباب دراسة المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

$$\left(a_0D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}D + a_n\right)y = 0$$

حيث a_k ثابت حقيقي لجميع قيم k إبتداءً بالصفر وإنتهاء بـ n . ويمكن إعادة كتابة هذه المعادلة في هيئة مؤثر تفاضلي $f(D)$ يؤثر على y ليكون الناتج صفرا

$$f(D)y = 0$$

أما المعادلة المساعدة فهي كثيرة حدود من الدرجة n في المتغير m ومساوية للصفر

$$f(m) = a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \ldots + a_{n-1} m + a_n = 0$$

حيث $a_0 \neq 0$.

ثانيا : للمعادلة المساعدة n من الجذور قد تكون حقيقية وقد تكون مركبة ، ويرتبط بهذه الجذور n من الحلول المستقلة خطيا ، وذلك على النحو التالي :

أ - إذا كان m_i جذرا حقيقيا مختلفا عن بقية الجذور الأخرى ، فإن

$$y_i = e^{m_i x}$$

هو الحل المرتبط بهذا الجذر، وهو حل مستقل خطيا عن سائر الحلول الأخرى .

ب - إذا كان هناك جذر متكرر j من المرات ، أي أن $m_1 = m_2 = \dots = m_j = \alpha$ ،
فإن هناك j من الحلول المستقلة خطيا والمرتبطة بهذا الجذر المتكرر ، وهي

$$e^{\alpha x} \;, x\, e^{\alpha x}, \;\dots\; , x^{j-1} e^{\alpha x}$$

ج - أما إذا كان $\beta \neq 0, m_1 = \alpha + i\beta$ جذرا مركبا للمعادلة المساعدة فلا بد أن يكون مرافقه $m_2 = \alpha - i\beta$ جذرا هو الآخر . وأما الحلان المستقلان خطيا والمرتبطان بهذين الجذرين المركبين فيشملهما الحل

$$y = c_1\, e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2\, e^{\alpha x} \sin \beta x$$

د - في حالة تكررالجذرين المركبين أكثر من مرة ، ولتكن j من المرات حيث $2j \leq n$ ، أي في حالة كون

$$m_1 = m_2 = \dots = m_j = \alpha + i\beta$$

وكذلك

$$m_{j+1} = m_{j+2} = \dots = m_{2j} = \alpha - i\beta$$

فإن الحلول المستقلة خطيا المرتبطة بهذه الجذور يشملها الحل

$$y = c_1\, e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2\, e^{\alpha x} \sin \beta x + c_3\, x\, e^{\alpha x} \cos \beta x$$
$$+ c_4 x\, e^{\alpha x} \sin \beta x + \dots + c_{2j-1} x^{j-1} e^{\alpha x} \cos \beta x + c_{2j}\, x^{j-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

هـ - يُنصح دائما بالإستعانة بالأمثلة وحل التمارين المدرجة في نهاية كل بند حتى تتضح الصورة وترسخ الفكرة في ذهن القارئ .

٦-٧ تمارين عامة

فيما يلي أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $(D^2 - 2D)y = 0$

(2) $(D^2 + D - 6)y = 0$

(3) $(4D^2 + 4D + 1)y = 0$

(4) $(D^2+1)y=0$

(5) $y''-9y'+9=0$

(6) $3y''+4y'+9y=0$

(7) $(D^3-D^2+D+3)y=0$

(8) $(D^3+2D^2+5D-26)y=0$

(9) $(D^3+2D^2-3D)y=0$

(10) $(D^3-3D^2+4)y=0$

(11) $(D^3+3D^2+3D+1)y=0$

(12) $(4D^3-21D-10)y=0$

(13) $y'''+3y''-4y'-6y=0$

(14) $y'''-y''+2y=0$

(15) $(D^4+4D^2+4)y=0$

(16) $(4D^3-7D+3)y=0$

(17) $(D-1)^2(D+3)(D^2+2D+5)^2y=0$

(18) $(D-1)^3(D-2)(D^2+D+1)(D^2+6D+10)^3y=0$

(19) $(D^4-2D^3+5D^2-8D+4)y=0$

(20) $(D^4-D^3-3D^2+D+2)y=0$

(21) $(D^5+D^4-9D^3-13D^2+8D+12)y=0$

(22) $(D^4+5D^2+4)y=0$

(23) $(D^3-D^2+D-1)y=0$

(24) $(4D^3+12D^2+13D+10)y=0$

(25) $(4D^3+28D^2+16D+37)y=0$

فيما يلي أوجد الحل الخاص الذى يحقق الشروط الابتدائية المعطاة :

(26) $(D^2 - D - 6)y = 0;\ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 1$

(27) $(D^3 + 6D^2 + 12D + 8)y = 0; y(0) = 1, y'(0) = -2, y''(0) = -y'(0)$

(28) $y''' + 7y'' + 14y' + 8y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = -3,\ y''(0) = 13$

(29) $y''' - 4y'' + 7y' - 6y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0$

(30) $y'' - 10y' + 25y = 0;\ y(0) = 1,\ y(1) = 0$

(31) $y'' + 4y = 0;\ y(0) = y(\pi) = 0$

(32) $(D^4 - 3D^3 + 3D^2 - D)y = 0;\ y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = y'''(0) = 1$

(33) $(4D^2 + 20D + 25)y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

(34) $(D^2 - D - 6)y = 0;\ y(0) = -1,\ y(1) = 1$

(35) $y'' + 2\pi y'' + \pi^2 y = 0;\ \ y(1) = 1,\ y'(1) = \pi^{-1}$

(36) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0;\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3$

(37) $(D^3 - 9D)y = 0;\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ \ y''(0) = 2$

الباب السابع

المعادلات الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة

■ مقدمة ■ إيجاد معادلة متجانسة بمعلومية الحل الخاص ■ طريقة المعاملات غير المعينة ■ طريقة التخمين وقاعدة التركيب ■ ملخص الباب .

٧-١ مقدمة

بعد أن تناولنا في الباب السابق المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الحقيقية الثابتة ، ورأينا أنه بإمكاننا إيجاد حل أي معادلة منها عن طريق إيجاد جذور المعادلة المساعدة ، أي أننا اختزلنا عملية إيجاد حل المعادلة التفاضلية وقصرناها على عملية إيجاد جذور معادلة صفرية طرفها الأيسر كثيرة حدود من الدرجة n . والسؤال الطبيعي الذي يفرض نفسه هنا هو : كيف يمكننا أن ننطلق من هنا لإيجاد حل لنفس المعادلة التفاضلية التي يختلف طرفها الأيمن عن الصفر ؟ ويمكننا إعادة صياغة السؤال بصورة رياضية أكثر شمولا ووضوحا فنقول : كيف نجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة ؟ ولعل خير ما نبدأ به مشوار الجواب هو أن نكتب نص هذه المعادلة التفاضلية التي نسعى إلى حلها

$$\left(b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + \ldots + b_{n-1} D + b_n\right) y = R(x) \qquad (1)$$

ولو رجعنا إلى نظرية ٥ في البند ٥-٥ لوجدنا أن إيجاد الحل العام يتكون من خطوتين :

الأولى : إيجاد الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$\left(b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + \ldots + b_{n-1} D + b_n\right) y = 0 \qquad (2)$$

وهو مايسمى بالدالّة المكملة y_c . وهذا ما تعلمناه جيدا من الباب السابق ويعتمد حله على إيجاد جذور المعادلة المساعدة كما أشرنا إلى ذلك آنفا .

الثانية : إيجاد حل خاص للمعادلة (1) وهو الحل الخالي من الثوابت الاختيارية والمحقق للمعادلة (1) ، وهو ما يُرمز له بالرمز y_p .

وبعد إكتمال هاتين الخطوتين ، نحصل على الحل العام للمعادلة (1) ، وهو

$$y = y_c + y_p$$

إذا نخلص إلى أن الأمر متوقف على إيجاد الحل الخاص للمعادلة (1) . ولأن ذلك ليس سهلا بالضرورة ، فقد تم تخصيص هذا الباب ، والباب الذي يليه لدراسة هذا الموضوع .

٧-٢ إيجاد معادلة متجانسة بمعلومية الحل الخاص

لتكن الدالّة $g(x)$ حلا خاصا للمعادلة التفاضلية المتجانسة

$$f(D)y = 0 \qquad (1)$$

حيث $f(D)$ مؤثر تفاضلي ذو معاملات ثابتة نرغب في إيجاده بحيث يكون لدينا

$$f(D)g = 0 \qquad (2)$$

ويبدو أنه يستحيل علينا أن نجد $f(D)$ لو كانت g أي دالّة عشوائية . أما عندما تكون g على صورة معينة فإنه يمكن إيجاد هذا المؤثر $f(D)$ ، وعندها نقول إن g تمثل حلا خاصا للمعادلة (1). فمثلا لو كانت $g = k$ حيث k ثابت ، لاستنتجنا فورا أن بإمكاننا اختيار $f(D) = D$. ولو كانت $g = x$ أو $g = x + 1$ لاخترنا $f(D) = D^2$. أما لو كانت $g = e^x$ لاخترنا $f(D) = D - 1$ لأننا تعلمنا من البند السابق أن المعادلة التفاضلية

$$(D - 1)y = 0 \qquad (3)$$

لها حل عام هو

$$y = c\, e^x$$

ولو أخذنا $c = 1$ لأدركنا أن g تحقق المعادلة (3) كما هو مطلوب .

وبصفة عامة لو كانت g مكونة من إحدى الدوال التالية :

أ – ثابت k .

ب – كثيرة حدود في x .

ج – دالّة أسية في صورة e^x .

د – الدالتين المثلثيتين $\cos \beta x$, $\sin \beta x$.

أو أي عدد محدود من عمليات جمع أو ضرب هذه الدوال ، فإنه من الممكن دائما أن نجد المؤثر التفاضلي الذي يلاشيها ، أي يؤثر عليها فيكون الناتج صفرا . ولعل من المناسب أن نزيد الأمر وضوحا بالأمثلة التالية :

مثال ١. أوجد معادلة تفاضلية متجانسة ذات معاملات ثابتة بحيث تكون الدالة

$$y = 3e^{-2x} - 5x$$

حلا خاصا لها .

الحل : نلاحظ أولا أن معاملي العددين وهما -5 , 3 لا تأثير لهما هنا طالما كانا مختلفين عن الصفر . فالواقع أننا نبحث عن معادلة تفاضلية تتحقق بالدالة $y = c_1e^{-2x} + c_2x$ ، والتي تمثل مجموع الحلين $y_1 = c_1 e^{-2x}$, $y_2 = c_2 x$ ، فالحل الأول ناتج عن معادلة مساعدة جذرها يساوي -2 . وهذه المعادلة هي

$$m - (-2) = m + 2$$

وهي مرتبطة بالمؤثر التفاضلي $D + 2$. أما الحل الثاني فناتج عن معادلة مساعدة ذات جذر مكرر هو الصفر ، وهي ببساطة المعادلة $m^2 = 0$ ، والمرتبطة بالمؤثر $D^2 = 0$. ومن ثم فإن المعادلة التفاضلية المطلوبة هي

$$D^2(D + 2)y = 0$$

أو

$$(D^3 + 2D^2)y = 0 \qquad (4)$$

وهذه المعادلة لها حل عام هو

$$y = c_1e^{-2x} + c_2 x + c_3$$

ولو أخذنا $c_1 = 3, c_2 = -5, c_3 = 0$ لحصلنا على الدالة g التي بدأنا بها .

وقد يشعر القارئ باننا أطلنا قليلا في المثال السابق ، الا أن ذلك ربما كان ضروريا في البداية ليتمكن القارئ من استيعاب الهدف المنشود من هذا البند ، وليحصل على الخبرة المناسبة . أما في المثالين التاليين فسنختصر الخطوات اللازمة إلى حد كبير .

ملحوظة. لاحظ في المثال السابق أنه طُلب منا إيجاد معادلة تفاضلية ما ، أي أن المعادلة ليست الوحيدة التي تحقق المطلوب ، وإنما لو اثّرنا على المعادلة بأي مؤثر تفاضلي آخر لحصلنا على معادلة تؤدي الفرض المطلوب ، فمثلا المعادلة

$$(D-3)(D^3+2D^2)y=0$$

تؤدي نفس الفرض ، لأن حلها العام هو

$$y=c_1e^{-2x}+c_2\,x+c_3+c_4\,e^{3x}$$

ولو أخذنا نفس قيم الثوابت c_1 , c_2 , c_3 أعلاه اضافة إلى $c_4=0$ لحصلنا على نفس الدالّة g التي بدأنا بها . لكن بإمكاننا أن نقول تجاوزا إن المعادلة (4) تمثل الحد الأدنى الذي نسعى اليه ، أو الذي نهدف اليه في الأمثلة والتمارين في هذا البند ، بل إن رتبة المؤثر التفاضلي D^3+2D^2 هي الرتبة الدنيا المطلوبة ، ولا يمكن إيجاد معادلة تحقق المطلوب ذات رتبة أقل .

مثال ٢ . أوجد معادلة تفاضلية متجانسة ذات معاملات حقيقية ثابتة بحيث تكون الدالة التالية حلا لها

$$g(x)=x-20x^2e^{-x}+2xe^{x}\sin 2x \qquad (5)$$

الحل : الحد الأول مرتبط بالجذر المكرر $m_1=m_2=0$ ، بينما الحد الثاني مرتبط بالجذر المكرر $m_3=m_4=m_5=-1$. أما الحد الثالث والأخير فمرتبط بالجذرين المركبين المكررين $m_6=m_7=1+2i$ ، $m_8=m_9=1-2i$. وبذلك تكون المعادلة المساعدة على النحو

$$f(x)=m^2(\,m+1)^3[(\,m-1)^2+4]^2=0$$

أو

$$f(x)=m^2(\,m+1)^3(\,m^2-2m+5)^2\;=0$$

ومن ثم نستنتج أن الدالّة المعطاة في (5) هي حل للمعادلة التفاضلية

$$D^2(\,D+1)^3(\,D^2-2D+5)^2y=0$$

والتي لها الحل العام

$$y = c_1 + c_2 x + e^{-x}\left(c_3 + c_4 x + c_5 x^2\right)$$
$$+ e^{x}\left(c_6 \cos 2x + c_7 \sin 2x\right) + xe^{x}\left(c_8 \cos 2x + c_9 . \sin 2x\right)$$

والذي منه نحصل على الدالّة g بأخذ

$$c_1 = c_3 = c_4 = c_6 = c_7 = c_8 = 0$$

وأخذ

$$c_2 = 1 \;,\; c_5 = -20 \;,\; c_9 = 2$$

تمارين

فيما يلي أوجد لكل دالّة معادلة تفاضلية خطية متجانسة ذات معاملات حقيقية ثابتة بحيث تكون الدالّة المعطاة حلا لها :

(1) $g = 9e^{-x} - 4e^{2x}$

(2) $g = \pi e^{4x} - 15x + 21$

(3) $g = x^3 - x^2 + e^{-x}$

(4) $g = 3 \sin x - e^{2x}$

(5) $g = -50xe^{-x} \cos 3x$

(6) $g = e^{-3x} + 13e^{2x} \sin 3x$

(7) $g = e^{ax} \cos bx$

(8) $g = \cos x + 2 \sin x$

(9) $g = 20 - x^2 - 6 \cos x + x \sin x$

(10) $g = 2e^{-x} + 3e^{x/2} - 3e^{-x/2}$

فيما يلي من التمارين أوجد جذور المعادلة المساعدة المرتبطة بمعادلة تفاضلية خطية متجانسة ذات معاملات حقيقية ثابتة تكون الدالّة المعطاة حلا خاصا لها :

(11) $g = x + xe^{-2x}$

(12) $g = e^{x} - e^{-x} + 2$

(13) $g = x^3 e^{3x} - \sin x$

(14) $g = e^{2x} \cos 2x$

(15) $g = -x\,(e^{x/2} - 2)$

(16) $g = 2e^{3x} - xe^{-3x}$

(17) $g = 6\sin 2x$

(18) $g = 6\cos 2x$

(19) $g = 6\,(\sin 2x + \cos 2x)$

(20) $g = -3\sin^2 x$

(21) $g = \sin^2 x + \cos^2 x + x$

(22) $g = -x^2 \sin(x/2) + 2x\cos(x/2)$

(23) $g = 2\cos^2 x - 1$

(24) $g = e^{2x}\left(\cos\sqrt{2}\,x + 5\sin\sqrt{2}\,x\right)$

(25) $g = 7e^{x} - xe^{-x} + x^2$

(26) $g = x^2\left(e^{x/2} - \dfrac{e^{x/2}}{x}\sin x\right)$

٣-٧ طريقة المعاملات غير المعينة

لنفترض أن لدينا المعادلة غير المتجانسة ذات المعاملات الحقيقية الثابتة

$$f_1(D)y = g(x) \qquad (1)$$

ولو رجعنا قليلا إلى بداية البند السابق لوجدنا أنه عندما تكون g على صورة معينة فإنه بالامكان إيجاد مؤثر تفاضلي $f_2(D)$ يلاشي الدالّة g . أو بمعنى آخر

$$f_2(D)g = 0 \qquad (2)$$

وباستعمال (1) نعوض عن g في المعادلة (2) لنحصل على

$$f_2(D)f_1(D)y = 0$$

ولهذه المعادلة حل عام y نجده عن طريق إيجاد جذور المعادلة المساعدة المرتبطة بالمؤثر التفاضلي $f(D) = f_2(D)f_1(D)$ ، وهي بالطبع $f_2(m)f_1(m) = 0$. وبالتالي فجذور هذه المعادلة المساعدة تتكون من مجموعتين أحدها ناشيء عن جذور المعادلة

$f_1(m) = 0$ والثانية عن $f_2(m) = 0$. وبالتالي فإن $y = y_c + h$ حيث y_c يمثل الحل العام للمعادلة المتجانسة $f_1(D)y = 0$. وعليه فإن $h = y - y_c$ يمثل البنية الأساسية للحل الخاص y_p الذي يحقق المعادلة التفاضلية (1) . وهذه الطريقة هي التي يطلق عليها مسمى " طريقة المعاملات غير المعينة " لإنها تهدف إلى إيجاد قيم محددة ومعينة للمعاملات الاختيارية الموجودة في صيغة y_p .

مثال ١. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\left(D^2 + 3D + 2\right)y = 4x^2 \qquad (4)$$

الحل : من الواضح أن المؤثر التفاضلي D^3 يلاشي الطرف الأيمن من المعادلة ، أي أن $f_2(D) = D^3$ بينما $f_1(D) = D^2 + 3D + 2$ ، وعليه فإننا نحصل على المعادلة المتجانسة

$$D^3\left(D^2 + 3D + 2\right)y = D^3(4x^2) = 0 \qquad (5)$$

الآن نكتب المعادلة المساعدة للمعادلة (5) وهي

$$m^3\,(m^2 + 3m + 2) = 0$$

أو

$$m^3\,(m + 1)\,(m + 2) = 0$$

وبالتالي فالحل العام للمعادلة (5) هو

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 + c_4 x + c_5 x^2$$

وحيث أن الدالّة

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

تمثل الدالّة المكملة للمعادلة (4) ، فإن الدالّة

$$y - y_c = c_3 + c_4 x + c_5 x^2$$

لابد أن تمثل الصيغة الأساسية للحل الخاص y_p للمعادلة (4) . ولنعد كتابة y_p مرة أخرى مع استبدال رموز الثوابت

$$y_p = A + Bx + Cx^2 \qquad (6)$$

وحتى تكون y_p هذه حلا خاصا للمعادلة (4) ، فلا بد من إيجاد قيم محددة للثوابت

وحتى تكون y_p هذه حلا خاصا للمعادلة (4) ، فلا بد من إيجاد قيم محددة للثوابت A , B , C . وهذا يتم عن طريق التعويض من (6) في المعادلة (4) التي تحققها الدالة

$$y''_p + 3y'_p + 2y_p = 2A + 3B + 2C + (2B + 6C)x + 2Cx^2 = 4x^2$$

وبمساواة معاملات الحدود المتماثلة نحصل على النظام التالي من المعادلات الآنية

$$2A + 3B + 2C = 0$$

$$2B + 6C = 0$$

$$2C = 4$$

وبحله نحصل على $A = 7,\ B = -6$, $C = 2$. وإذا فالحل الخاص للمعادلة (4) هو

$$y_p = 7 - 6x + 2x^2$$

وأما الحل العام لنفس المعادلة فهو

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + 7 - 6x + 2x^2$$

مثال ٢. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 - 3D)y = 6e^{3x} - 5\sin x \qquad (7)$$

الحل : بتطبيق ما تعلمناه في البند السابق ، يتبين لنا أن للمعادلة المساعدة المرتبطة بالمؤثر التفاضلي الذي يلاشي الطرف الأيمن جذور هي $m'_1 = 3, m'_2 = i$ $m'_3 = -i$ بينما للطرف الأيسر معادلة مساعدة ذات جذور هي $m_1 = 0, m_2 = 3$ ولو رتبنا الجذور في قائمة واحدة لكتبنا

$$0\ ,\ 3\ ,\ 3\ ,\ i\ ,\ -i$$

ومن ثم فالحل العام يجب أن يكون على الصورة

$$y = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3\, x\, e^{3x} + c_4 \cos x + c_5 \sin x$$

وحيث أن $y_c = c_1 + c_2\, e^{3x}$ ، فلا بد أن تكون y_p على الصورة

$$y_p = A\, xe^{3x} + B\cos x + C\sin x$$

وبالتعويض في المعادلة (7) حيث

$$y''_p - 3y_p = 6e^{3x} - 5\sin x$$

نجد أن

$$3A\,e^{3x} + (-B - 3C)\cos x + (3B - C)\sin x = 6e^{3x} - 5\sin x$$

وبمساواة المعاملات نحصل على

$$3A = 6$$

$$-B - 3C = 0$$

$$3B - C = -5$$

ومنه ينتج لدينا أن $A = 2\,,\ B = -3/2\,,\ C = 1/2$. وبالتالي فالحل العام للمعادلة هو

$$y = c_1 + c_2\,e^{3x} + 2x\,e^{3x} - (3/2)\cos x + (1/2)\sin x$$

ولعله من المفيد الآن أن نلخص هذه الطريقة في خطوات معدودة :

طريقة المعاملات غير المعينة

حتى نجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $f_1(D)y = g$ لا بد أن نتبع التالي :

أ - تأكد أولاً أن المؤثر التفاضلي $f_1(D)$ ذو معاملات حقيقية ثابتة ، وأن الدالة g من الأنواع المحددة في البند ٧-٢ ، أي لا بد أن تكون g حلاً لمعادلة تفاضلية متجانسة $f_2(D)g = 0$ حتى يمكن تطبيق هذه الطريقة .

ب - أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة $f_1(D)y = 0$ وليكن y_c .

جـ - أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة $f_2(D)f_1(D)y = 0$ ، ولنرمز له بالحرف y ، ثم ضع $y_p = y - y_c$. ولمزيد من التأكد لاحظ أنه لا يوجد حد من حدود y_p يمكن أن يكون حلاً للمعادلة المتجانسة $f_1(D)y = 0$.

د - وحيث أن المطلوب هو تحقيق المعادلة الأصلية $f_1(D)y_p = g$ ، فإننا نساوي معاملات الحدود المتماثلة في كلا الطرفين لتكون نظاماً من المعادلات الخطية المساوية في عددها لعدد المعاملات المجهولة .

هـ - أوجد حل هذا النظام من المعاملات الخطية لتحصل على الحل الخاص .

مثال ٣. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' + y = x \cos x - \cos x \qquad (8)$$

الحل : نطبق الخطوات التي ذكرناها قبل قليل :

أ - الدالة $g = x \cos x - \cos x$ هي حل لمعادلة متجانسة $f_2(D)g = 0$ جذور معادلتها المساعدة هي الجذور الأربعة

$$m'_1 = m'_2 = i \ , \ m'_3 = m'_4 = -i$$

بينما المعادلة المتجانسة $y'' + y = 0$ مرتبطة بالجذرين $m_1 = i \ , \ m_2 = -i$.

ب - الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$ هو الناتج عن الجذرين m_1, m_2 ، أي :

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

ج - الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$f_2(D) f_1(D)y = (D - i)^2(D + i)^2(D^2 + 1)\, y = 0$$

هو

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + A\, x \cos x + B\, x \sin x + C x^2 \cos x + E x^2 \sin x$$

أي أن

$$y_p = A\, x \cos x + B\, x \sin x + C x^2 \cos x + E x^2 \sin x$$

وبالتعويض عن y بالدالّة y_p في المعادلة (8) نحصل على

$$y''_p + y_p = 4E\, x \cos x - 4C\, x \sin x + (2B + 2C) \cos x + (-2A + 2E) \sin x = x \cos x - \cos x$$

د - بمساواة المعاملات نجد أن

$$4E = 1 \ , -4C = 0 \ , \ 2B + 2C = -1 \ , -2A + 2E = 0$$

والتي نحصل منها على

$$A = 1/4 \ , \ B = -1/2 \ , C = 0 \ , \ E = 1/4$$

هـ - وبالتالي فالحل العام للمعادلة (8) هو

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (1/4)\, [x \cos x - 2\, x \sin x + x^2 \sin x]$$

مثال ٤. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2+4D+5)y = 25x - 26\,e^{3x} \qquad (9)$$

الحل : نحاول هنا وبعد الأمثلة السابقة أن نختصر بعض الشيء فلدينا هنا

$$m_1 = -2+i\,,\ m_2 = -2-i\,,\ m'_1 = m'_2 = 0\,,\ m'_3 = 3$$

ومن ثم

$$y_c = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

$$y_p = A + B\,x + C\,e^{3x}$$

لاحظ أنه لا توجد جذور مكررة بين مجموعتي $\{m'_1, m'_2, m'_3\}$ ، $\{m_1, m_2\}$ ، وأن y_c لا يحتوي على أي حد من حدود y_p . وبإجراء عمليات الاشتقاق اللازمة والتعويض في المعادلة (9) ننتهي إلى المعادلة

$$5A + 4B + 5Bx + 26Ce^{3x} = 25x - 26\,e^{3x}$$

وبإكمال إجراءات مساواة معاملات الحدود المتماثلة نجد أن

$$A = -4\ ,\ B = 5\ ,\ C = -1$$

وبالتالي فالحل العام المطلوب هو

$$y_c = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + 5x - e^{3x} - 4$$

مثال ٥. أوجد الحل الخاص الذي يحقق المعادلة التفاضلية

$$(D^2+3D)y = -18x \qquad (10)$$

بحيث

$$y(0) = 0\,,\ y'(0) = 5$$

الحل : بنظرة سريعة نجد أن $m_1 = 0\,,\ m_2 = -3$ بينما $m'_1 = m'_2 = 0$. وبالتالي فالحل العام هو

$$y = c_1 + c_2\,e^{-3x} + Ax + Bx^2$$

أي أن

$$y_p = Ax + Bx^2$$

وبالتعويض عن y بالدالة y_p في المعادلة (10) نجد أن $A = 2\,,\ B = -3$.

وبالتالي فإن

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + 2x - 3x^2$$

ومنه

$$y' = -3c_2 e^{-3x} + 2 - 6x$$

وباستعمال الشروط الابتدائية المعطاة

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0$$
$$y'(0) = -3c_2 + 2 = 5$$

نجد أن $c_1 = 1\ ,\ c_2 = -1$ ، وبالتالي فالحل الخاص المطلوب هو

$$y = 1 - e^{-3x} + 2x - 3x^2$$

تمارين

فيما يلي أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $y'' - 9y = 54$

(2) $y'' + y' = 3$

(3) $(D^2 + 4D + 4)y = 2(x + 3)$

(4) $(D^2 - 3D + 2)y = 2x^3 - 9x^2 + 6x$

(5) $(D^2 - 1)y = 2e^{-x} - 4xe^{-x} + 10\cos 2x$

(6) $(D^2 - 1)y = 11x + 1$

(7) $y'' - 3y' + 2y = e^x \sin x$

(8) $(D^2 - 4D + 4)y = e^x$

(9) $y'' + 25y = 6 \sin x$

(10) $(D^2 + D + 1)y = \cos x - x^2 e^x$

(11) $(D^2 + 6D + 9)y = -x e^x$

(12) $(D^2 - 1)y = x^2 e^x + 5$

(13) $(D^2 - 3D - 4)y = 6e^x$

(14) $y'' - y' - 2y = 1 - 2x - 9e^{-x}$

(15) $(D^2 - 4D + 3)y = 2(2\sin x + \cos x)$

(16) $y'' - y' = e^x(1 - e^{-x})^2$

(17) $y'' + y = \cos x$

(18) $(D^2 - 1)y = 8xe^x$

(19) $(D^2 + D + 1)y = x \sin x$

(20) $y'' + 4y' + 5y = 50x + 13e^{3x}$

(21) $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y = e^x + x^2$.

(22) $y''' - y' = x$

(23) $(D^3 + 3D^2 - 4)y = e^{-2x}$

(24) $(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)y = e^x + 16 - x$

(25) $(D^3 + D^2 - 4D - 4)y = 3e^{-x} - 4x - 6$

(26) $y''' + 4y'' + y' - 26y = e^{-3x} \sin 2x + x$

(27) $(D^4 - 1)y = e^{-x}$

(28) $(D^4 - 2D^3 + D^2)y = e^x + 1$

(29) $(16D^4 - 1)y = e^{x/2}$

(30) $(D^3 - D^2 + D - 1)y = 4 \sin x$

فيما يلي أوجد الحل الخاص المستوفي للشروط الابتدائية المعطاة :

(31) $y'' + y = 10e^{2x};\ y(0) = y'(0) = 0$

(32) $y'' - 64y = 16;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

(33) $y'' + 2y' + 5y = 8e^{-x};\ y(0) = 0,\ y'(0) = 8$

(34) $y'' + y = 8\cos 2x - 4\sin x;\ y(\pi/2) = -1,\ y'(\pi/2) = 0$

(35) $y' - y = 1;\ y(0) = 0$

(36) $(D^2 + 1)y = 2e^{-x};\ y(0) = y'(0) = 0$

(37) $y'' + y' - 12y = e^x + e^{2x} - 1;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$

(38) $y'' - y' = \sin x - e^{2x};\ y(0) = 1 = -y'(0)$

(39) $y'' + 4y' + 5y = 8\sin x;\ y(0) = 0 = y'(0)$

(40) $y''' - y' = 4e^{-x} + 3e^{2x};\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1 = -y''(0)/2$

٧-٤ طريقة التخمين / قاعدة التركيب

solution by inspection / superposition principle

ربما كان بإمكاننا الاستغناء كلية عن هذا البند ، والاعتماد على البند السابق لكننا آثرنا أن يُضم هذا البند حتى ندرك أهمية السرعة والبساطة اللتين تتولدان عادة عن حس رياضي مرهف يساعد كثيرا في بناء المنطق السليم واتخاذ الخطوة الرياضية الصائبة . فلا جديد في هذا البند لا يمكن حله بطريقة البنود السابقة ، وإنما هو توفير الوقت واختصار الجهد من ناحية ، ومن ناحية أخرى اتباع للسلوك الرياضي المنطقي الذي ينبذ الأسلوب الآلي المجرد دون تفكير أو تأمل .

ولنبدأ بمثال بسيط لحل المعادلة التفاضلية

$$\left(D^2+4D+3\right)y=15 \qquad (1)$$

فهنا نعلم أن الدالّة المكملة يمكن إيجادها بسهولة من جذري المعادلة المساعدة وهما : -1 , -3

$$y_c=c_1e^{-x}+c_2\,e^{-3x}$$

أما الحل الخاص y_p وهو بيت القصيد في معظم هذه المسائل فيمكننا تخمينه مباشرة لو تأملنا قليلا في المعادلة (1) ، فنحن نسعى إلى إيجاد دالّة y_p يؤثر عليها المؤثر التفاضلي D^2+4D+3 فيكون الناتج ثابتا مساويا 15 . فماذا لو أخترنا y_p لتكون مقدارا ثابتا يساوى العدد 5 ؟ أو ليس ذلك يحقق المعادلة ؟ نعم بالتأكيد ! وكذلك الحال لو كانت لدينا أي معادلة تفاضلية على الشكل

$$\left(b_0\ D^n+b_1D^{n-1}+\ldots+b_{n-1}D+b_n\right)y=R_0 \qquad (2)$$

حيث R_0 مقدار ثابت ، و b_n ثابت يختلف عن الصفر ، فإن الحل الخاص هو

$$y_p=\frac{R_0}{b_n} \qquad (3)$$

لأن جميع الاشتقاقات هنا تساوي صفرا ، وبالتالي نحصل على

$$0+0+\ldots+b_n\left(\frac{R_0}{b_n}\right)=R_0$$

هذه حالة واحدة . وحالة أخرى عندما يكون $b_n=0$ في المعادلة أعلاه ، بينما

تختلف b_{n-1} عن الصفر ، أي

$$\left(b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + \dots + b_{n-1} D\right) y = R_0$$

عندها لو اخترنا

$$y_p = \frac{R_0 x}{b_{n-1}}$$

لوجدنا أن جميع الاشتقاقات تساوي صفرا عدا المشتقة الأولى . ومن ثم نحصل على

$$b_{n-1} D\, y_p = b_{n-1}\left(\frac{R_0}{b_{n-1}}\right) = R_0$$

وبصفة عامة لو كان الاشتقاق $D^k y$ هو الحد الأدنى الذى يظهر فعلا في المعادلة (2) أي لو كانت لدينا المعادلة

$$\left(b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + \dots + b_{n-k} D^k\right) y = R_0 \qquad (4)$$

حيث R_0 ثابت بينما b_{n-k} تختلف عن الصفر. فبنفس المنطق يهمنا أن يكون تأثير الحد الأخير على y_p مساويا لثابت بينما يكون تأثير الحدود الأخرى مساويا للصفر. وهنا نلجأ إلى ما تعلمناه سابقا ، فنحن نعلم أن $D^k x^k = k!$ ، لذا فإن أي اشتقاق ذي رتبة أعلى من k سيلاشي حتما x^k . لهذا كان من الطبيعي أن نختار

$$y_p = \frac{R_0 x^k}{k!\, b_{n-k}} \qquad (5)$$

والذي سيكون بالتأكيد حلا خاصا للمعادلة (4) .

مثال ١. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\left(D^5 + 9D^3\right) y = 5 \qquad (6)$$

الحل : من المعادلة المساعدة $m^5 + 9m^3 = 0$ نحصل على الجذور $0, 0, 0, 3i, -3i$ وبالتالي نحصل على الدالّة المكملة

$$y_c = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \cos 3x + c_5 \sin 3x$$

أما الحل الخاص y_p فهو كما ذكرنا أعلاه لا بد أن يساوي مقدارا ثابتا مضروبا في

الدالّة x^3 لأن D^3 هو الحد ذو الاشتقاق الأدنى في المعادلة ، وبمعنى آخر فإن

$$y_p = \frac{5x^3}{3!\,9} = \frac{5x^3}{54}$$

وللتأكد نعوض في المعادلة (6) حيث

$$D^5 y_p = 0\,,\; D^3 y_p = \frac{5}{9}$$

ومن ثم فإن

$$\left(D^5 + 9D^3\right) y_p = 0 + 9\,(5/9) = 5 = R_0$$

أما الحل العام فهو

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \cos 3x + c_5 \sin 3x + \frac{5x^2}{54}$$

ولننظر الآن إلى المعادلة التفاضلية

$$\left(D^2 + 4\right) y = 5 \cos 3x \qquad (7)$$

فنحن هنا نبحث عن حل خاص y_p يتناسب طرديا مع $\cos 3x$ لأن كونه متناسبا طرديا مع $\cos 3x$ يعني أن اشتقاقه الثاني $D^2 y_p$ يتناسب كذلك طرديا مع $\cos 3x$. وبالتأكيد فإن كان

$$y_p = A \cos 3x \qquad (8)$$

فإن

$$D^2 y_p = -9A \cos 3x$$

ومن ثم يكون y_p حلا للمعادلة (7) إذا كان

$$(-9 + 4)\,A = 5$$

أو

$$A = -1$$

وبالتالي فالحل العام للمعادلة (7) هو

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \cos 3x$$

ولو طبقنا طريقة المعاملات غير المعينة لحل المعادلة (7) لافترضنا أن

$$y_p = A \sin 3x + B \cos 3x$$

وبالتعويض في (7) نجد أننا سنحصل بعد عدة عمليات جبرية على القيمتين

$$A = 0 \ , \ B = -1$$

وهكذا وبقليل من الحس الرياضي وبمزيد من المران يمكننا أن نخمن الحل الخاص عندما تكون g دالة ذات وضع معين وتكون المعادلة التفاضلية في صورة معينة .

لكن هذا لا يعني البتة أن هذه الطريقة تجدي مع أي معادلة تفاضلية حتى لو كانت بسيطة المظهر ، فللمعادلة دور كبير في نجاح هذه الطريقة ، فمثلا لو أردنا إيجاد الحل الخاص للمعادلة

$$\left(D^2 + 4D + 5\right)y = 8 \sin x$$

عن طريق محاولة أن يكون y_p متناسبا مع $\sin x$ لفشلنا بسبب وجود الحد الأوسط $4Dy$ الذى يتناسب مع $\cos x$ وليس مع $\sin x$ ، ولا يُوجد أي حد في طرفي المعادلة يمكن أن يعوض أو يلغي الحد المحتوي على $\cos x$ ، ولذا يستحيل وجود حل خاص على الصورة $y_p = A \sin x$. ولتأكيد ذلك نطبق طريقة المعاملات غير المعينة فنجد بعد سلسلة من العمليات الجبرية أن

$$y_p = \sin x - \cos x \, .$$

ولهذا – وكما أسلفنا – فإننا نحتاج إلى رهافة الحس الرياضي وكثرة الخبرة والمران حتى يمكننا أن نحدد بسرعة ودقة صلاحية المعادلة التفاضلية المعطاة لتطبيق طريقة التخمين هذه ، ومن ثم اقتراح الحل الخاص المناسب في حالة صلاحية المعادلة ، فإن لم تكن صالحة منذ الوهلة الأولى فنلجأ إلى الطريقة التقليدية التي درسناها في البند الماضي .

والآن ننتقل إلى قاعدة أخرى تسمى قاعدة التركيب ، ونعني بها تركيب الحل الخاص من الحلين الخاصين المعطيين .

قاعدة التركيب. ليكن y_1 الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$f(D)y = R_1(x)$$

وليكن y_2 الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$f(D)y = R_2(x)$$

عندها يكون $y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2$ هو الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$f(D)y = c_1 R_1(x) + c_2 R_2(x)$$

حيث c_2 , c_1 ثابتين اختياريين .

ملحوظة .

أ – يمكن تعميم قاعدة التركيب إلى أي عدد محدود من المعادلات التفاضلية .فلو أن y_k تمثل الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$f(D)y = R_k(x)$$

حيث $k = 1, 2, \dots, n$ ، عندها تمثل الدالّة

$$y_p = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

الحل الخاص للمعادلة

$$f(D)y = c_1 R_1(x) + \dots + c_n R_n(x)$$

حيث $c_1, c_2, \dots, c_n$ ثوابت اختيارية .

ب – يمكن أن ننظر إلى قاعدة التركيب من الإتجاه المعاكس ، أي أن بحثنا عن الحل الخاص للمعادلة

$$f(D)y = R(x)$$

يمكن تجزئته إلى مراحل عن طريق معاملة كل حد من $R(x)$ على حدة ، ثم ضمها مرة أخرى لإيجاد الحل الخاص المطلوب .

مثال ٢. لو علمنا أن

$$y_1 = -\frac{x + 2/3}{3} \quad , \quad y_2 = \frac{e^{2x}}{5}$$

هما الحلان الخاصان على الترتيب للمعادلتين

$$\left(D^2 + 2D - 3\right)y = x \quad , \quad \left(D^2 + 2D - 3\right)y = e^{2x}$$

أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$\left(D^2 + 2D - 3\right)y = 3x - 5e^{2x}$$

الحل : باستخدام قاعدة التركيب نجد أن الحل الخاص المطلوب هو :

$$y = 3y_1 - 5y_2 = 3\left(-\frac{x + 2/3}{3}\right) - 5\left(\frac{e^{2x}}{5}\right)$$

$$= -\left(x + \frac{2}{3}\right) - e^{2x}$$

مثال ٣. أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$(D^2 - 9)y = 4e^x + 3x - 5\sin 2x$$

الحل : نحاول تطبيق قاعدة التركيب وكذلك طريقة التخمين لإيجاد الحل الخاص المطلوب . ولنبدأ بالمعادلة

$$(D^2 - 9)y = e^x$$

وحلها الخاص هو $y_1 = -\frac{e^x}{8}$. أما المعادلة

$$(D^2 - 9)y = x$$

فحلها الخاص هو $y_2 = -\frac{x}{9}$ ، بينما الحل الخاص للمعادلة

$$(D^2 - 9)y = \sin 2x$$

هو $y_3 = -\frac{\sin 2x}{13}$. ومن ثم فالحل الخاص المطلوب هو

$$y_p = 4y_1 + 3y_2 - 5y_3$$

$$= -\frac{e^x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{5}{13}\sin 2x$$

مثال ٤. أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$y'' + 4y = \sin x - 4\sin 2x \qquad (9)$$

الحل : باستعمال قاعدة التركيب (وطريقة التخمين إن أمكن) نجد أولا أن $y_1 = \frac{\sin x}{3}$ يمثل الحل الخاص للمعادلة

$$y'' + 4y = \sin x$$

أما بالنسبة للمعادلة

$$y'' + 4y = \sin 2x \qquad (10)$$

فلا يمكن استعمال طريقة التخمين لحلها لأن جذور المعادلة المساعدة المرتبطة بالمعادلة المتجانسة

$$y'' + 4y = 0$$

هي $m = \pm 2i$. ولذلك فإن أي دالّة على الصورة $y = A \sin 2x$ تحقق المعادلة المتجانسة ولا تحقق المعادلة (10) غير المتجانسة ، ولذلك لا بد من استعمال طريقة المعاملات غير المعينة . ونظرا لأن $m' = \pm 2i$ أيضا ، فإن

$$y_2 = A\, x \sin 2x + B\, x \cos 2x$$

وبالتعويض في (10) نحصل على

$$4A\, x \cos 2x - 4B\, x \sin 2x = \sin 2x$$

ومنه نجد أن $B = -\frac{1}{4}$, $A = 0$ ، أي أن

$$y_2 = -\frac{x}{4} \cos 2x$$

وبالتالي فالحل الخاص المطلوب للمعادلة هو

$$y_p = \frac{\sin x}{3} + x \cos 2x$$

ملحوظة. لو تأملنا مثال ٤ فإنه يمكننا إدراك القاعدتين التاليتين :

أولا : في الحالة التي تكون المعادلة فيها على النمط

$$\left(D^2 + a^2\right)y = \sin bx \qquad (11)$$

وفي حالة اختلاف a عن b ، فإن الحل الخاص يكون تلقائيا

$$y_p = \left(a^2 - b^2\right)^{-1} \sin bx \qquad (12)$$

ثانيا : أما في حالة تساوي a مع b ، فإن المعادلة (11) تصبح على النحو

$$\left(D^2 + a^2\right)y = \sin ax \qquad (13)$$

ولا يمكن إيجاد حل خاص للمعادلة (13) من النوع $y_p = A \sin ax$ لأن $D^2 + a^2$ ستلاشي $A \sin ax$ ، ولكن حلها الخاص يحمل الصيغة

$$A\, x \cos ax + B\, x \sin ax$$

وبالتعويض في (13) نجد أنه لا بد أن تتحقق المعادلة

$$-2a\,A\,x \sin ax + 2a\,B\,x \cos ax = \sin ax$$

ومنه نستنتج أن $B = 0$ ، $A = \dfrac{-1}{2a}$. ومن ثم يكون

$$y_p = \frac{-x \cos ax}{2a}$$

هو الحل الخاص المناسب للمعادلة (13) . لاحظ في كلتا الحالتين إمكانية أن تكون a عددا مركبا .

وبالمقابل فإننا نترك للقارئ برهنة المثال التالي :

مثال ٥ . اثبت أنه في حالة اختلاف a عن b ، فإن الحل الخاص للمعادلة

$$(D^2 + a^2)y = \cos bx$$

هو

$$y_p = (a^2 - b^2)^{-1} \cos bx$$

أما إذا كانت $a = b$ ، فان

$$y_p = \left(\frac{x}{2a}\right) \sin ax$$

تمثل الحل الخاص .

تمارين

عن طريق التخمين ، أوجد الحل الخاص لكل من المعادلات التفاضلية التالية . تحقق من إجابتك في كل مرة .

(1) $(D^2 + 4)y = 16$

(2) $(D^2 + 25)y = -25$

(3) $(3D^2 - 6D + 3)y = -15$

(4) $(5D^3 - 7D^2 + 9D - 3)y = -9$

(5) $(D^4 - 3D^2)y = 12$

(6) $(D^3 + 2D)y = 5$

(7) $(D^3 - 5D)y = 40$

(8) $(D^6 + D^2)y = -12$

(9) $(D^4 + 4D^3 + 2D^2)y = -6$

(10) $(3D^7 - 6D^6 + 4D^5)y = 100$

(11) $(D^2 + 9)y = 3\cos x$

(12) $(D^2 + 4)y = 6\sin x$

(13) $(D^2 + 1)y = -2\cos\sqrt{2}\,x$

(14) $(D^2 + 9)y = 4\sin\sqrt{3}\,x$

(15) $(D^2 + 4)y = 5\cos 3x$

(16) $(D^2 + 4)y = 8x + 1 - 15e^x$

(17) $(D^2 + D)y = 3(2 + e^{2x})$

(18) $(D^2 - D - 2)y = 2e^{-2x}$

(19) $(D^2 + D - 1)y = e^x + x - 2$

(20) $(D^3 + 2D^2 + 1)y = 12e^x$

(21) $(D^2 - 1)y = \sin 2x$; تلميح : $(D^2 + a^2)y = \sin bx,\ a = i\ ,\ b = 2$

(22) $(D^2 - 2)y = 2x - 3$

(23) $(D^2 - 4)y = -26$

(24) $(D^2 + 1)y = 5e^{-x}$

(25) $(D^2 + 2D + 1)y = 4e^{-x}$

(26) $(D - 1)^2 y = 6e^{-2x}$

(27) $(D^2 - 7D + 3)y = e^x$

(28) $(4D^2 + 1)y = 12\sin x$

(29) $(4D^2 + 1)y = -12\cos x$

(30) $(D^3 - 1)y = 5x^2 - 4$

(31) $(D^4 + 4)y = 3e^{2x}$

(32) $(D^4 + 4)y = -5\sin 2x$

$$(33)\quad (D^3 - D)y = -5\cos 2x$$

$$(34)\quad (D^4 + 4)y = 3e^{2x} - 5\sin 2x$$

$$(35)\quad (D^5 - D^3 - 10D)y = 20\sin 2x$$

٧-٥ ملخص الباب

وكما يبدو من عنوان الباب ، فقد تم التركيز فيه على المعادلات الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الحقيقية الثابتة . وليس ذلك فحسب ، بل اشترطنا هنا أن تكون الدالّة $R(x)$ (الطرف الأيمن من المعادلة) من نوع خاص ، وحتى نكون أكثر دقة ، فقد اشترطنا أن تكون R نفسها حلا لمعادلة تفاضلية خطية متجانسة ، وبالتالي فإن أي حد من حدودها لن يتجاوز أن يكون ثابتا أو كثيرة حدود في x أو دالّة أسية في صورة $e^{\alpha x}$ أو دالّة مثلثية من نوع $\cos\beta x$, $\sin\beta x$ أو مجموع أو حاصل ضرب دوال من هذه الأنواع .

فإذا ما كانت $R(x)$ (أو $g(x)$ كما رمزنا لها في البندين ٧-٢ ، ٧-٣) مستوفية للشرط الذى ذكرناه آنفا ، فإننا عندئذ نطبق ما يُسمى بطريقة المعاملات غير المعينة لإيجاد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة ، ثم نضيف اليه الدالّة المكملة لنحصل على الحل العام للمعادلة .

أما البند ٧-٤ فقد تناول البحث عن الحل الخاص للمعادلة عن طريق التخمين توفيرا للوقت واختصارا للجهد اللذين عادة ما يتضاعفان عند استعمال طريقة " المعاملات غير المعينة " إلا أن مدى فعالية التخمين أقل بكثير من مدى فعالية طريقة المعاملات غير المعينة . هذا ويتطلب التخمين حسا رياضيا جيدا إضافة إلى بعض الخبرة والمران .

وقد شمل البند ٧-٤ أيضا تطبيق قاعدة التركيب لحل المعادلات غير المتجانسة ، وهي طريقة تدخل ضمن نطاق فعاليات طريقة المعاملات غير المعينة إلا أنها توفر كثيرا من الوقت والجهد مع زيادة في الدقة وتقليل من حجم الخطأ .

الباب الثامن

المعاملات الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثانية

■ مقدمة ■ طريقة اختزال الرتبة ■ طريقة تغير الوسطاء ■ ملخص الباب ■ تمارين عامة .

٨-١ مقدمة

في الباب السابق تعلمنا كيف نجد حل المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الحقيقية الثابتة

$$\left(b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + \dots + b_{n-1} D + b_0\right) y = R(x) \qquad (1)$$

وذلك باستخدام طريقة المعاملات غير المعينة . ولكن وكما علمنا من الباب السابق أن لهذه العملية قصورا واضحا ، فهي قابلة للتطبيق فقط عندما تكون R نفسها حلا لمعادلة تفاضلية خطية متجانسة ذات معاملات حقيقية ثابتة .

وفي هذا الباب سنحاول التغلب على هذا القصور عن طريق دراسة طريقتين جديدتين تتجاوزان هذا القصور ، بل يمكن استخدامها لحل المعادلات الخطية ذات المعاملات المتغيرة أيضا .

٨-٢ طريقة اختزال الرتبة

لتكن لدينا المعادلة الخطية المتجانسة ذات الرتبة الثانية

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \qquad (1)$$

ولتكن $y_1 \neq 0$ حلا لهذه المعادلة ، أي أن

$$y_1 + p\, y_1' + q\, y_1 = 0 \qquad (2)$$

وحيث أننا نسعى لإيجاد حل آخر للمعادلة (2) يكون مستقلا خطيا عن y_1 فقد يكون من المناسب أن نقدم الإقتراح التالي .

$$y_2(x) = v(x)\, y_1(x) \qquad (3)$$

حيث v دالّة متغيرة نسعى لإيجاد صيغتها فيما بعد ، ومن ثم نجد قيمة y_2 .

بمفاضلة حاصل الضرب $v\,y_1$ نجد أن

$$y_2 = v\,y_1 + v'\,y_1$$
$$y_2 = v\,y_1' + v''\,y_1 + 2y_1' v'$$

وباستعمال هاتين المعادلتين نعوض عن y بـ y_2 في المعادلة (1) لنحصل على

$$\left(v y_1'' + 2v'\,y_1' + v''\,y_1\right) + p\left(v y_1' + v'\,y_1\right) + q\,v\,y_1 = 0$$

أو

$$v''\,y_1 + \left(2y_1' + p\,y_1\right)v' + \left(y_1'' + p\,y_1' + q\,y_1\right)v = 0 \qquad (4)$$

لكن y_1 تحقق المعادلة (2) ، أي أن معامل v في المعادلة (4) يساوي الصفر ، وبذلك نختصر المعادلة (4) إلى المعادلة

$$v''\,y_1 + \left(2y_1' + p\,y_1\right)v' = 0 \qquad (5)$$

الآن نجري التعويض $v' = w$ فتتحول المعادلة (5) بعد قسمتها على y_1 إلى المعادلة

$$w' + \left(p + \frac{2y_1'}{y_1}\right)w = 0 \qquad (6)$$

وهي معادلة خطية ذات متغيرات منفصلة حيث أنها مكافئة للمعادلة

$$\frac{w'}{w} + \left(p + 2\,\frac{y_1'}{y_1}\right) = 0$$

وبإجراء التكامل نحصل على

$$\ln|w| + 2\ln|y_1| = -\int p\,dx$$

أو

$$w\,y_1^2 = e^{-\int p\,dx}$$

ومنه

$$v' = w = \frac{\left[e^{-\int p\,dx}\right]}{y_1^2}$$

وبإجراء التكامل مرة أخرى ومن ثم إيجاد قيمة y_2 باستخدام (3)

$$y_2 = y_1 v = y_1 \left[\int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}\, dx \right] \qquad (7)$$

وللتاكد من الاستقلال الخطي للحل y_2 نجد الرونسكيان

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}\, dx \\ y_1' & \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1} + y_1' \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}\, dx \end{vmatrix}$$

$$= e^{-\int p\,dx} \neq 0$$

مثال ١. لو علمنا أن $y_1 = x^2$ تمثل حلا للمعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \qquad (8)$$

أوجد الحل العام الصالح للفترة $(0,\infty)$.

الحل : نعيد كتابة المعادلة (8) في الصيغة البديلة بعد القسمة على x^2

$$y'' - \left(\frac{3}{x}\right) y' + \left(\frac{4}{x^2}\right) y = 0 \qquad (9)$$

وباستعمال (7) نحصل على

$$y_2 = x^2 \left[\int \frac{e^{3\int x^{-1} dx}}{x^4}\, dx \right] = x^2 \int \frac{dx}{x} = x^2 \ln x$$

وبالتالي فالحل العام للمعادلة هو

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$$

مثال ٢. بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0 \qquad (10)$$

يمكننا أن نتحقق أن الدالة $y_1 = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ تمثل حلا لها على الفترة $(0,\infty)$. أوجد الحل العام للمعادلة (10) .

الحل : نقسم أولا المعادلة (10) على x^2 ثم نطبق القانون (7) لنحصل على

$$y_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \int \frac{e^{-\int x^{-1} dx}}{\left(\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^2} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \int \csc^2 x \, dx$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} (-\cot x) = -\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

ومن ثم فالحل العام للمعادلة (10) هو

$$y = \frac{c_1 \sin x + c_2 \cos x}{\sqrt{x}}$$

وهكذا نكون قد أتممنا استعراض طريقة اختزال الرتبة لإيجاد حل آخر y_2 بمعلومية حل معلوم y_1 لمعادلة متجانسة من الرتبة الثانية لا يُشترط أن تكون معاملاتها ثابتة ، بحيث يكون y_1, y_2 مستقلين خطيا .

الآن نتناول المعادلة غير المتجانسة من نفس الرتبة ، ونحاول أن نطبق عليها نفس الطريقة لإيجاد الحل الخاص للمعادلة بمعلومية حل معلوم للمعادلة المتجانسة ذات العلاقة .

ولنبدأ بالمعادلة غير المتجانسة

$$y'' + p\,y' + q\,y = R \qquad (11)$$

ولتكن الدالّة y_1 حلا للمعادلة المتجانسة

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0$$

ولنستعمل نفس الاقتراح السابق

$$y_2 = v\,y_1$$

ثم نتدرج نفس التدرج السابق مع ملاحظة أن الطرف الأيمن من المعادلة (4) هو $R(x)$ وليس صفرا ، وكذلك الحال مع المعادلة (5) حيث تصبح

$$v''\,y_1 + (2y_1' + p\,y_1)v' = R \qquad (12)$$

وبجعل $v' = w$ نحصل على المعادلة الخطية

$$y_1 w' + (2y_1' + p\,y_1)w = R$$

وبتطبيق نظرية البند ٢-٦ نجد عامل المكاملة ومنه نجد w ثم نجد v بمكاملة w. وأخيرا نحصل على الحل الخاص $y = v\,y_1$.

مثال ٣. أوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^2 - 5D + 6)y = e^{2x} \qquad (13)$$

الحل : الدالّة المكملة للمعادلة هي

$$y_c = c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{3x}$$

سوف نستعين بالحل $y_1 = e^{2x}$ لتطبيق طريقة اختزال الرتبة ، وذلك باختيار

$$y = v\,e^{2x}$$

ومنه

$$y' = v'\,e^{2x} + 2v\,e^{2x}$$

$$y'' = v''\,e^{2x} + 4v'\,e^{2x} + 4v\,e^{2x} .$$

وبالتعويض في المعادلة (13) ينتج لدينا

$$v''\,e^{2x} - v'\,e^{2x} = e^{2x}$$

أو

$$v'' - v' = 1 .$$

الآن نضع $v' = w$ ليكون لدينا

$$w' - w = 1$$

وهي معادلة خطية عامل مكاملتها هو .

$$u = e^{-\int dx} = e^{-x}$$

ومن ثم

$$w' e^{-x} - w e^{-x} = e^{-x}$$

أو

$$\frac{d}{dx}\left[w e^{-x}\right] = e^{-x}$$

ثم نكامل الطرفين

$$w e^{-x} = - e^{-x}$$

أو

$$w = v' = - 1$$

ومنه

$$v = - x$$

وإذاً

$$y = - x e^{2x}$$

هو الحل الخاص للمعادلة (13) . أما الحل العام لها فهو

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} - x e^{2x}$$

ملحوظة. من الواضح أنه كان بإمكاننا تطبيق طريقة المعاملات غير المعينة لحل معادلة المثال السابق . وربما كان ذلك أفضل وأيسر ، ولكن كما أسلفنا سابقا ، لا يمكن الاعتماد على طريقة المعاملات غير المعينة الا إذا كانت $R(x)$ نفسها حلا لمعادلة متجانسة ذات معاملات ثابتة كما هو الحال في المثال السابق . ولذا فإن معادلة المثال التالي لا يمكن حلها بطريقة المعاملات غير المعينة ، وإنما يمكن عند هذه المرحلة استعمال طريقة اختزال الرتبة .

مثال ٤ . أوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^2+1)y = \sec^3 x \qquad (14)$$

الحل : الدالة المكملة للمعادلة هي

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

وسنختار $y = v \sin x$ كحل خاص مقترح . ومنه نحصل على

$$y' = v' \sin x + v \cos x$$

$$y'' = v'' \sin x + 2v' \cos x - v \sin x$$

وبالتعويض في (14) نجد أن

$$v'' \sin x + 2v' \cos x = \sec^3 x$$

وبوضع $v' = w$ نصل إلى المعادلة الخطية

$$w' \sin x + 2w \cos x = \sec^3 x$$

وبالضرب في $\sin x$ ينتج لدينا

$$w' \sin^2 x + w\,(2\sin x \cos x) = \sec^3 x \sin x$$

أو

$$d(w \sin^2 x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

وبمكاملة الطرفين نحصل على

$$w \sin^2 x = \frac{1}{2}(\cos x)^{-2}$$

أي أن

$$v' = w = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\csc^2 x + \sec^2 x\right)$$

وبإجراء التكامل مرة أخرى نحصل على

$$v = \frac{1}{2}\left(-\cot x + \tan x\right)$$

وبالتالي فالحل الخاص الذى نريده هو

$$y_p = v\sin x = \frac{1}{2}\left(-\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-2\cos^2 x}{\cos x}\right) = \frac{1}{2}\left(\sec x - 2\cos x\right)$$

أما الحل العام فهو

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{2}\sec x$$

لاحظ أن الحد $-\cos x$ في الحل الخاص y_p قد تم ضمه إلى الحد العام .

تمارين

باستخدام طريقة اختزال الرتبة ، أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية:

(1) $(D^2 - 1)y = x - 1$

(2) $(D^2 + 4)y = 5e^x - 4x$

(3) $(D^2 + 4)y = 4\sin^2 x$

(4) $(D^2 - 1)y = e^x$

(5) $(D^2 + 1)y = \sec x$

(6) $(D^2 + 1)y = \sec x$

(7) $(D^2 + 1)y = -\sec^3 x$

(8) $(D^2 + 1)y = \cot x$

(9) $y'' + 2y' + y = (1 - e^x)^{-2}$

فيما يلي مرفق مع كل معادلة تفاضلية أحد حلولها ، أوجد الحل الآخر :

(10) $y'' - 4y' + 4y = 0; \quad y_1 = e^{2x}$

(11) $y'' - y = 0; \quad y_1 = (e^x + e^{-x})/2$

(12) $xy'' - 7xy' + 16y = 0; \quad y_1 = 4$

(13) $xy'' + y' = 0; \quad y_1 = \ln x$

(14) $(1-2x-x^2)y''+2(x+1)y'-2y=0; \quad y_1=1+x$

(15) $x^2y''-xy'+2y=0; \quad y_1=x\sin(\ln x)$

(16) $(1+2x)y''+4xy'-4y=0; \quad y_1=e^{-2x}$

(17) $x^2y''-xy'+y=0; \quad y_1=x$

(18) $x^2y''-5xy'+9y=0; \quad y_1=x^3\ln x$

(19) $x^2y''-4xy'+6y=0; \quad y_1=x^2+x^3$

(20) $(3x+1)y''-(9x+6)y'+9y=0; \quad y_1=e^{3x}$

(21) $y''-3y'\tan x=0; \quad y_1=1$

فيما يلي مرفق مع كل معادلة تفاضلية غير متجانسة حل للمعادلة المتجانسة .
أوجد الحل الآخر ، وكذلك أوجد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة :

(22) $y''-3y'+2y=5e^{3x}; \quad y_1=e^x$

(23) $(x-1)y''-xy'+y=1; \quad y_1=e^x$

٨-٣ طريقة تغير الوسطاء

في البند السابق رأينا أنه إذا كانت y_1 حلا للمعادلة التفاضلية المتجانسة

$$y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=0 \qquad (1)$$

عندها يمكننا الاستعانه بالحل y_1 لإيجاد الحل العام للمعادلة غير المتجانسة

$$y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=R(x) \qquad (2)$$

وأسمينا هذه الطريقة طريقة اختزال الرتبة ، وتكمن الاستعانة بالحل y_1 في حقيقة أن $c_1\,y_1$ يعتبر أيضا حلا للمعادلة (1) . ثم درسنا احتمال إحلال الدالة $v(x)$ محل الثابت الاختيارى c_1 ، ونظرنا إلى إمكانية وجود حل للمعادلة (2) على الهيئة $v\,y_1$. وبالفعل فقد قادنا هذا الإفتراض إلى معادلة خطية ذات متغيرات منفصلة كان بمقدورنا إيجاد حل لها .

أما في طريقة تغير الوسطاء فنبدأ بفرضية أننا نعلم كلا الحلين المستقلين خطيا y_2 ، y_1 للمعادلة (1) ، أي أن

$$y_c=c_1\,y_1+c_2\,y_2 \qquad (3)$$

هو الحل العام للمعادلة (1) حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان . أما مبدأ هذه الطريقة الجديدة فيقوم على أساس إيجاد حل للمعادلة (2) عن طريق إحلال دالتين $v_1(x)$, $v_2(x)$ محل الثابتين c_2 , c_1 ، أي أننا نسعى لإيجاد حل للمعادلة (2) على الصيغة

$$v(x) = v_1(x)\, y_1(x) + v_2(x)\, y_2(x) \qquad (4)$$

وحيث أننا نتعامل مع دالتين مجهولتين $v_1(x), v_2(x)$ فمن المعقول أن نتوقع الانتهاء بمعادلتين تشملان هاتين الدالتين حتى يمكن تحديدهما . ومن الطبيعي أن تكون المعادلة (2) أولى هاتين المعادلتين . ويتبقى علينا فرض شرط يجمع كلا من v_1, v_2 يكون في صالحنا ، بمعنى أن يجعل العملية أكثر سهولة وأقل تعقيدا . وربما كان من السهل علينا أن نختار $v_2(x) = 0$ ، لكن هذا الاختيار يعيدنا مرة أخرى إلى طريقة اختزال الرتبة التي سبق أن درسناها . إذا ما هو الشرط الثاني الكفيل بإنتاج المعادلة الثانية التي نحتاجها لإيجاد v_1, v_2 ؟ لنترك الاجابة إلى ما بعد الخطوة التالية ، ولنفاضل y لنحصل على

$$y' = \left(v_1' y_1 + v_2' y_2\right) + \left(v_1 y_1' + v_2 y_2'\right) \qquad (5)$$

وهنا تبدو ملامح الاختيار المناسب . فبدلا من أن نخوض في معالجة اشتقاقات عليا للدالتين v_1, v_2 ، وبدلا من أن تزداد العمليات الجبرية تعقيدا ، فإننا نختار الشرط التالي المتمثل في المعادلة التالية

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \qquad (6)$$

وبذلك تصبح المعادلة (5) على النحو

$$y' = v_1 y_1' + v_2 y_2' \qquad (7)$$

ثم

$$y'' = v_1' y_1' + v_1 y_1'' + v_2' y_2' + v_2 y_2'' \qquad (8)$$

وبالتعويض عن y , y' , y'' من المعادلات (4) , (7) و (8) على التوالي في المعادلة (2) ثم تبسيطها جبريا نجد أن

$$v_1\left(y_1'' + p\, y_1' + q\, y_1\right) + v_2\left(y_2'' + p\, y_2' + q\, y_2\right) + v_1' y_1' + v_2' y_2' = R(x)$$

لكن كلا من y_1, y_2 يحقق المعادلة (1) ومن ثم تُختصر المعادلة الأخيرة إلى المعادلة

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = R(x) \qquad (9)$$

وهكذا خلصنا إلى المعادلتين الآنيتين (6) و (9)

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0$$
$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = R(x) \qquad (10)$$

ويمكن إعادة كتابتهما على الشكل

$$y_1 v_1' + y_2 \cdot v_2' = 0$$
$$y_1' v_1' + y_2' v_2' = R(x) \qquad (11)$$

والقصد من ذلك هو أن ننظر إلى v_1' , v_2' على أساس أنهما المجهولان اللذين نسعى إلى إيجادهما ، بينما نعامل الدوال المعلومة y_1, y_1', y_2, y_2' على أساس أنهم المعاملات الثابتة . ومن هذا المنطلق فإن النظام (11) يُوجد له حل إذا كانت المحددة

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

تختلف عن الصفر . وهذا واقع بالفعل اذ أن المحددة عبارة عن $W[y_1, y_2]$ أو رونسكيان y_1 , y_2 الذي يختلف عن الصفر لكون y_1 , y_2 مستقلين خطيا (انظر الباب الخامس) . وبحل النظام (11) نصل إلى القانونين

$$v_1' = -\frac{y_2 R}{W} \quad , \quad v_2' = \frac{y_1 R}{W} \qquad (12)$$

وبإجراء التكامل نحصل على

$$v_1(x) = \int \frac{-y_2 R}{W} dx \quad , \quad v_2(x) = \int \frac{y_1 R}{W} dx \qquad (13)$$

هذا ويمكننا تلخيص هذه الخطوات على النحو التالي :

طريقة تغير الوسطاء

لإيجاد الحل الخاص للمعادلة $y' + p\,y + q\,y = R$ اتبع الخطوات التالية :

1 - أوجد حلين مستقلين خطيا y_1, y_2 للمعادلة المتجانسة ذات العلاقة ثم خذ الدالّة

$$y = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

ب - أوجد قيم v_1, v_2 من المعادلة (13) أعلاه ، أو بإيجاد حل للنظام (11) .

ج - عوض عن v_1, v_2 في المعادلة $y = v_1 y_1 + v_2 y_2$ لتحصل على الحل الخاص المطلوب .

ملحوظة . نظرا لطول العمليات الجبرية المطلوبة للوصول إلى المعادلة (13) يُستحسن بعد إيجاد y_1, y_2 الشروع في حل النظام (11) ، أو تطبيق القانونين في (12) أو(13) مباشرة لاستخراج v_1, v_2 ومن ثم الحل الخاص y_p . وهذا ما سنلجأ اليه في الأمثلة التالية ، وبإمكان الطالب أن يسلك الطريق الطويل إذا رغب في ذلك تفاديا لحفظ القوانين في (12) أو(13) .

مثال ١. أوجد الحل العام على الفترة $(-\pi/2, \pi/2)$ للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 + 1)y = \tan x$$

الحل : نجد أولا حلي المعادلة المتجانسة ذات العلاقة وهما

$$y_1 = \cos x \ , \ y_2 = \sin x$$

ولكي نطبق مباشرة القانون (13) نجد أولا

$$W[y_1, y_2] = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

ومن ثم يكون لدينا

$$v_1(x) = -\int \tan x \sin x \, dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$$

$$= -\int \frac{(1 - \cos^2 x)}{\cos x} dx = = \int (\cos x - \sec x) \, dx$$

$$= \sin x - \ln|\sec x + \tan x|$$

وكذلك

$$v_2(x) = \int \tan x \cos x \, dx = \int \sin x \, dx = -\cos x,$$

وبالتالي فالحل الخاص المطلوب هو

$$y_p = (\sin x - \ln|\sec x + \tan x|)\cos x - \cos x \sin x$$
$$= -\cos x \ln|\sec x + \tan x|$$

أما الحل العام فهو

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln|\sec x + \tan x|$$

مثال ٢. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 - 3D + 2)y = (1 + e^{-x})^{-1} - 20\cos x \qquad (14)$$

الحل : لمزيد من التبسيط سنلجأ إلى تطبيق قاعدة التركيب ، أي أن ننظر إلى كل من المعادلتين التاليتين على حدة

$$(D^2 - 3D + 2)y = (1 + e^{-x})^{-1} \qquad (15)$$

و

$$(D^2 - 3D + 2)y = \cos x \qquad (16)$$

وذلك بإيجاد الحل الخاص لكل منهما ثم نطبق القاعدة المذكورة لاستخراج الحل الخاص للمعادلة (14) (انظر البند ٧-٤) .

ولنبدأ بادئ ذي بدء بإيجاد حلين مستقلين للمعادلة المتجانسة ذات العلاقة ، وحيث أن جذري المعادلة المساعدة هما 1, 2 ، فإن الحلين المطلوبين هما

$$y_1 = e^x \quad , \quad y_2 = e^{2x}$$
$$W[y_1, y_2] = e^{3x}$$

والآن نشرع في إيجاد الحل الخاص للمعادلة (15) باستعمال القانون (13)

$$v_1 = -\int \frac{e^{2x}(1+e^{-x})^{-1}}{e^{3x}}\,dx = -\int e^{-x}(1+e^{-x})^{-1}\,dx$$
$$= \ln(1+e^{-x})$$

$$v_2 = \int \frac{e^x (1+e^{-x})^{-1}}{e^{3x}}\, dx = \int e^{-2x} (1+e^{-x})^{-1}\, dx$$

$$= \int e^{-x} e^{-x} (1+e^{-x})^{-1}\, dx$$

$$= \ln(1+e^{-x}) - (1+e^{-x})$$

إذا الحل الخاص المطلوب للمعادلة (15) هو

$$y_p(x) = e^x \ln(1+e^{-x}) - e^{2x} - e^x + e^{2x} \ln(1+e^{-x}) \qquad (17)$$

ولإيجاد الحل الخاص للمعادلة (16) نستعمل طريقة المعاملات غير المعينة لسهولتها لنحصل في النهاية على الحل الخاص

$$y_p(x) = \frac{\cos x - 3 \sin x}{10} \qquad (18)$$

وباستعمال قاعدة التركيب نحصل من (17) ، (18) على الحل العام

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + (e^{2x} + e^x) \ln(1+e^{-x}) + 6 \sin x - 2 \cos x$$

مع ملاحظة أن الحدين e^x , e^{2x} في(17) قد تم دمجهما مع الحد العام $c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

ورب سائل يسأل : هل يمكن تطبيق طريقة تغير الوسطاء على معادلات تفاضلية ذات رتبة أعلى من اثنين ؟ والجواب : نعم يمكن ذلك ، وبنفس الأسلوب تقريبا ، فلو كانت لدينا المعادلة

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = R(x) \qquad (19)$$

وكان الحل العام للمعادلة المتجانسة ذات العلاقة على النحو

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

فإننا نفترض أن الحل الخاص للمعادلة يكون على النحو

$$y = v_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + v_n y_n$$

حيث $v_1, v_2, \dots, v_n$ دوالّ في المتغير x نسعى إلى إيجادها لتحديد y . ولأن y تحقق المعادلة (19) وجب علينا أن نشتق y حتى نصل إلى الاشتقاق $D^n y$ ، وفي كل اشتقاق نجمع الحدود المشتملة على الاشتقاقات الأولى للدوال $v_1, v_2, \dots, v_n$

ثم نساويها بالصفر ، وبالتالي نحصل على النظام

$$y_1 v_1' + y_2 v_2' + \dots + y_n v_n' = 0$$
$$y_1' v_1' + y_2' v_2' + \dots + y_n' v_n' = 0$$
$$y_1^{(n-2)} v_1' + y_2^{(n-2)} v_2' + \dots + y_n^{(n-2)} v_n' = 0$$
$$y_1^{(n-1)} v_1' + y_2^{(n-1)} v_2' + \dots + y_n^{(n-1)} v_n' = R$$

ثم نجد المحددة $W[y_1 , \dots , y_n]$ ، ونكمل على نفس الطريقة التي تحدثنا عنها آنفا عندما كانت $n = 2$ فقط . ولعل المثال التالي يعطينا رؤية أسهل وأوضح . وفي كثير من الأحيان يكون من الأسهل حل هذا النظام من المعادلات جبريا للحصول على v_k ، ثم بالتكامل نحصل على v_k حيث $k = 1, \dots, n$.

مثال ٣. أوجد الحل العام لما يسمى بمعادلة كوشي – أويلر

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2x\, y' + 2y = x^3 \sin x\,, \quad x > 0$$

علما بأن المجموعة $\{x, x^{-1}, x^2\}$ تمثل حلولا مستقلة خطيا للمعادلة المتجانسة ذات العلاقة .

الحل : نبدأ أولا بالقسمة على x^3 (معامل y''') لنحصل على

$$y''' + x^{-1} y'' - 2x^{-2} y' + 2x^{-3} y = \sin x\,, \; x > 0$$

ومن ثم يكون الحل الخاص المطلوب على الشكل

$$y_p = x\, v_1 + x^{-1} v_2 + x^2 v_3 \qquad (20)$$

والمطلوب إيجاد v_1, v_2, v_3 . ومن ثم فإن المعادلات المطلوب حلها هي :

$$x v_1' + x^{-1} v_2' + x^2 v_3' = 0 \qquad (21)$$
$$v_1' - x^{-2} v_2' + 2x v_3' = 0 \qquad (22)$$
$$2x^{-3} v_2' + 2 v_3' = \sin x \qquad (23)$$

بضرب المعادلة (22) في x ثم إضافتها إلى (21) نحصل على

$$2v_1' + 3x\, v_3' = 0 \qquad (24)$$

وبضرب المعادلة (23) في x ثم إضافتها إلى ضعف المعادلة (22) نحصل على

$$2v_1' + 6x\, v_3' = x \sin x \qquad (25)$$

وبطرح (24) من (25) نجد قيمة v_3'

$$v_3' = \frac{\sin x}{3}$$

وباستعمال (24) نجد v_1'

$$v_1' = -\frac{1}{2} x \sin x$$

ثم نستخدم (23) لإيجاد v_2'

$$v_2' = \frac{1}{6} x^3 \sin x$$

وبالتكامل نجد أن

$$v_1(x) = \frac{1}{2}(x \cos x - \sin x)$$

$$v_2(x) = \frac{1}{6}\left[-x^3 \cos x + 3\left(x^2 \sin x - 2 \sin x + 2x \cos x\right)\right]$$

$$v_3(x) = -\frac{1}{3}\cos x$$

وبالتالي فالحل الخاص المطلوب كما في المعادلة (20) هو

$$y_p = \frac{1}{6}[3x^2 \cos x - 3x \sin x - x^2 \cos x + 3x \sin x$$
$$- 6x^{-1} \sin x + 6 \cos x - 2x^2 \cos x] = \cos x - x^{-1} \sin x$$

أما الحل العام للمعادلة فهو

$$y = c_1 x + c_2 x^{-1} + c_3 x^2 + \cos x - x^{-1} \sin x$$

ونختم نقاش هذا البند بمثال يعطينا الحل العام لمعادلة خاصة قد تتكرر كثيرا في التطبيقات العملية وفي التمارين العامة .

مثال ٤. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' + y = f(x) \qquad (26)$$

حيث $f(x)$ أي دالّة قابلة للتكامل على الفترة المطلوب إيجاد الحل عليها ، فمثلا يُكتفى بأن تكون الدالّة f متصلة على فترة الحل (a,b) ، أو أن تكون نقاط عدم إتصالها ذات عدد محدود .

الحل : من المعلوم أن الدالّتين $\sin x$, $\cos x$ مستقلتان خطيا ، وتمثل كل منهما حلا للمعادلة المتجانسة $y'' + y = 0$ كما أن $W[y_1, y_2] = 1$. وبتطبيق القانون (13) مع ملاحظة أن الحل المطلوب صالح على الفترة (a,b) نجد أن

$$v_1(x) = \int_a^x -\sin \beta \; f(\beta)\, d\beta$$

$$v_2(x) = \int_a^x \cos \beta \;\; f(\beta)\, d\beta$$

وبالتالي فالحل الخاص هو

$$y = y_p = -\cos x \int_a^x f(\beta) \;\sin \beta \, d\beta \;\; + \sin x \int_a^x f(\beta) \cos \beta \, d\beta$$

$$= \int_a^x f(\beta) \;\left(\sin x \;\cos \beta - \cos x \;\sin \beta \;\right) d\beta$$

$$= \int_a^x \; f(\beta) \;\sin (x - \beta)\, d\beta$$

أما الحل العام فهو

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \int_a^x \; f(\beta) \;\sin (x - \beta)\, d\beta \qquad (27)$$

لاحظ أن x داخل إشارة التكامل تُعامل كثابت بينما β هي المتغير .

تمارين

فيما يلي استخدم طريقة تغير الوسطاء لإيجاد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $(D^2 - 1)y = e^x + 1$

(2) $(D^2 + 4)y = \tan \;2x$

(3) $2y'' - 2y' - 4y = 2e^{3x}$

(4) $(D^2 + 1)y = \csc x \;\cot x$

(5) $(D^2-2D+1)y=e^x/x$

(6) $y''+y=\sec^3 x$

(7) $y''+16y=\sec 4x$

(8) $y''+y=\tan^2 x$

(9) $(D^2+4)y=\csc^2 2x$

(10) $(D^2+1)y=\sec^2 x\ \csc x$

(11) $(D^2-1)y=2(1-e^{-2x})^{-1/2}$

(12) $(D-1)(D-2)(D-3)y=e^x$

(13) $y'''-2y''+y'=x$

(14) $(D^3+3D^2-4)y=e^{2x}$

(15) $y'''+y'=\tan x\ ,\quad 0<x<\pi/2$

فيما يلي أوجد حل المعادلة التفاضلية بالاستعانة بحلول المعادلة المتجانسة المعطاة :

(16) $x^3y'''-3xy'+3y=x^4\cos x\ ,\ x>0;\ y_1=x\ ,\ y_2=x^{-1},\ y_3=x^3$

(17) $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=x^{-1},\ x>0;\ y_k=x^k\ ,\ k=1,2,3$

٨-٤ ملخص الباب

عالجنا في هذا الباب بصفة رئيسية المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات الرتبة الثانية ، الا أننا ذكرنا في البند الثالث أنه بالإمكان تعميم طريقة تغير الوسطاء إلى معادلات ذات رتب أعلى ، ورسمنا الخطوط العريضة لهذا التعميم ، وكذلك ضربنا مثالا لذلك ، كما أدرجنا بعض التمارين المناسبة في نهاية البند المذكور . ولقد كان جل تركيزنا على إيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=R(x) \qquad (1)$$

من خلال الاستعانة بالمعادلة التفاضلية المتجانسة ذات العلاقة

$$y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=0 \qquad (2)$$

أولا : طريقة اختزال الرتبة

وتتم بمعلومية حل واحد غير صفري للمعادلة (2) ، وليكن y_1 ثم نفترض أن الحل الخاص المطلوب هو $y = v\,y_1$ حيث v دالّة في x مطلوب إيجادها . وبإجراء الاشتقاقين الأول والثاني للدالّة y ثم التعويض في (1) ، واستعمال الاختزال $w = v'$ تتحول المعادلة الناتجة إلى معادلة خطية من الرتبة الأولى ذات متغيرات منفصلة يمكن حلها لإيجاد w المساوية v' ، ومن ثم نكامل لإيجاد v ، وأخيرا نجد $y = v\,y_1$.

ثانيا : طريقة تغير الوسطاء

وتتم بمعلومية حلين مستقلين خطيا للمعادلة (2) ، وليكونا y_1, y_2 . ثم نفترض أن الحل المطلوب هو $y = v_1\,y_1 + v_2\,y_2$ إضافة إلى اشتراط أن تكون المعادلة $v_1\,y_1 + v_2\,y_2 = 0$ قائمة . وبضم هذا الشرط مع كون y يحقق المعادلة (1) يتم لنا الحصول على معادلتين جبريتين آنيتين (أنظر النظام (11)) نجد من خلال حلهما آنيا الدالتين v_1, v_2 ومن ثم نجد الحل الخاص y .

وهذه الطريقة أكثر شمولا من سابقتها ، وربما كانت أسهل تطبيقا إذا كان بالإمكان حفظ القانونين (13) الخاصين بإيجاد v_1, v_2 مباشرة دون الخوض في التفاصيل الدقيقة المؤدية إلى القانونين نفسيهما في نهاية المطاف .

٥-٨ تمارين عامة

فيما يلي أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $(D^2 - 1)y = 2e^{-x}\,(1 + e^{-2x})^{-2}$

(2) $(D^2 + 16)y = \tan 4x$

(3) $(4D^2 - 12D + 9)y = e^{4x} + e^{3x}$

(4) $(x^2D^2 + 2xD - 2)y = 6x^{-2} + 3x\,;\; y_1 = x\,,\; y_2 = x^{-2},\;\; x > 0$

(5) $y'' - y = (1 - e^{2x})^{-3/2}$

(6) $xy'' + (x-1)y' - y = 0;\;\; y_1 = e^{-x}\,,\; x > 0$

(7) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0 \quad y_1=x \ , \ -1<x<1$

(8) $(D^2+1)\,y=\sec^2 x \ \tan x$

(9) $(D^2-1)y=2(1+e^x)^{-1}$

(10) $(D^3+D)y=\sec^2 x$

(11) $y''-3y'+2y=\sin e^{-x}$

(12) $y''+y=\sec^3 x \ \tan x$

(13) $(D^2+4D+3)y=\sin e^x$

(14) $(D^2+1)y=\csc^3 x \ \cot x$

(15) $y''-y=(e^{2x}+1)^{-1}$

(16) $y''-y=2(e^x-e^{-x})^{-1}$

(17) $xy''-(x+1)y'+y=x^2; \ y_1=e^x, \ y_2=x+1$

(18) $xy''+(5x-1)y'-5y=x^2e^{-5x}; \ y_1=5x-1, \ y_2=e^{-5x}$

(19) $y''+y=\tan x+e^{3x}-1$

(20) $y''+4y=\sec^4 2x$

(21) $y''+y=3\sec x+1-x^2$

(22) $\dfrac{y''}{2}+2y=\tan 2x-\dfrac{e^x}{2}$

(23) $x^3y'''-2x^2y''-5xy'+5y=x^{-2}, \ x>0; \ y_1=x, \ y_2=x^5, \ y_3=x^{-1}$

(24) $y''-y=e^{2x}(3\tan e^x+e^x \ \sec^2 e^x)$

(25) $y''-3y'+2y=\cos e^{-x}$

(26) $(D-1)^2\,y=e^{2x}(e^x+1)^{-2}$

الباب التاسع

حلول متسلسلات القوى[1]

مقدمة ■ النقاط العادية والنقاط الشاذة ■ حلول المعادلات قرب نقطة عادية ■ ملخص الباب ■ تمارين عامة .

٩-١ مقدمة

سبق لنا دراسة عدة طرق مختلفة لإيجاد حلول المعادلات التفاضلية ألخطية ذات المعاملات الثابتة . وعلمنا أن معالجة المعادلة التفاضلية الخطية ذات الرتبة الأولى تفضي إلى إيجاد عامل مكاملة يؤدي إلى تمام المعادلة ومن ثم حلها .

وبالنسبة لحل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات المتغيرة والتي تزيد رتبتها على الواحد ، فقد استعرضنا في الباب السابق طريقة اختزال الرتبة وطريقة تغير الوسطاء ، إلا أن لكل من هاتين الطريقتين بعض القصور الذي قد ينتج عنه استحالة حل المعادلة التفاضلية . فبالنسبة لطريقة اختزال الرتبة قد تواجهنا مشكلة عدم تمكننا من إيجاد التكاملات المطلوبة لتحديد الدالة v . وكذلك الحال عندما نلجأ إلى طريقة تغير الوسطاء ، فقد نُجابه بمشكلة عدم تمكننا من إيجاد التكاملات اللازمة للوصول إلى الدالتين v_1, v_2 .

ولهذا كان اللجوء إلى استعمال متسلسلات القوى للتغلب على هذه المصاعب وبالتالي الوصول إلى حل للمعادلة التفاضلية الخطية ذات المعاملات المتغيرة .

وقبل الدخول في عمق الموضوع نسطر بعض التعاريف والحقائق :

أ - تعريف متسلسلة القوى power series

يقال للتعبير الذى على الهيئة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + \ldots + a_k (x-x_0)^k + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

بأنه متسلسلة قوى حول النقطة x_0 حيث x يرمز لمتغير بينما المعاملات الحقيقية ... $a_0, a_1, ..., a_k,$ ... ثابتة .

ب - تقارب متسلسلة القوى convergence of power series

يقال للمتسلسلة $\sum a_n (x - x_0)^n$ بأنها متقاربة عند النقطة $x = r$ إذا وُجد عدد A بحيث أن نهاية المتتابعة $\{A_n\}$ تؤول إليه حيث $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$.

ج - فترة التقارب interval of convergence

لكل متسلسلة قوى فترة تقارب . وتعرّف فترة التقارب بأنها مجموعة الأعداد التي تتقارب عندها المتسلسلة .

د - التقارب المطلق absolute convergence

يقال لمتسلسلة قوى بأنها تتقارب تقاربا مطلقا عند النقطة $x = r$ إذا كانت متسلسلة القوى $\sum |a_n| |r - x_0|$ متقاربة .

هـ - نصف قطر التقارب radius of convergence

لكل متسلسلة قوى نصف قطر تقارب . ويتم عادة حساب نصف قطر التقارب باستعمال اختبار النسبة ratio test

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x - x_0| = l$$

فالمتسلسلة ستتقارب تقاربا مطلقا لجمع قيم x التي تفضي إلى جعل قيمة النهاية l أقل من واحد . وبأسلوب أكثر دقة يمكن أن نقول إن نصف قطر التقارب هو مقلوب L حيث

$$L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

وإذا رمزنا بالحرف R لنصف قطر التقارب ، فإن

$$R = \frac{1}{L}$$

وعليه فإن المتسلسلة تتقارب تقاربا مطلقا لجميع قيم x بحيث $|x - x_0| < R$ ، ولا تتقارب لتلك القيم بحيث $|x - x_0| > R$. أما بالنسبة لقيمة x المحققة للمعادلة $|x - x_0| = R$ ، فالوضع غير معلوم ويختلف من متسلسلة لأخرى .
وعندما تكون $R = 0$ ، فإن فترة التقارب تتكون من نقطة واحدة هي x_0 . أما عندما $R = \infty$ ، فإن متسلسلة القوى تتقارب لجميع قيم x .

و - متسلسلة القوى تمثل دالّة متصلة داخل نطاق فترة التقارب .

ز - يمكن اشتقاق متسلسلة القوى حدا حدا داخل نطاق فترة التقارب ، كما يمكن إجراء التكامل عليها حدا حدا داخل نفس النطاق .

ح - يمكن إضافة متسلسلة قوى لأخرى حدا حدا إذا كان لهما فترة تقارب مشتركة .

والآن لننظر إلى المعادلة

$$y' - 2xy = 0 \qquad (1)$$

وكما نعلم من الباب الثاني ، فإن الدالّة $y = e^{x^2}$ تعتبر حلا مباشرا للمعادلة (1) .
ولكن من المعروف أن e^x يمكن وضعها في صورة متسلسلة القوى

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (2)$$

وبالتالي يمكن كتابة الحل المباشر على الصورة

$$y = e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \qquad (3)$$

حيث كلا المتسلسلتين (2) , (3) تتقاربان لجميع قيم x الحقيقية . وبمعنى آخر ، فإن علمنا بالحل مقدما مكننا من إيجاد حل للمعادلة التفاضلية على صورة متسلسلة قوى غير منتهية . ولكن هب أننا نريد أن نجد حلا للمعادلة (1) على صورة متسلسلة قوى بطريقة مباشرة . ولنحاول طريقة مشابهة لتلك التي أطلقنا عليها مسمى " المعاملات غير المعينة " .

لنفترض أنه يُوجد حل على صورة متسلسلة قوى في x وحول النقطة $x_0 = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (4)$$

والسؤال الطبيعي هنا : هل بإمكاننا إيجاد قيم المعاملات a_n بحيث أن المتسلسلة المعطاة بالمعادلة (4) تتقارب إلى دالّة تحقق المعادلة (1) ؟ وربما بدأ الجواب بمحاولة التعويض من (4) في (1) . ولنبدأ بمفاضلة (4) حدا حدا

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$$

وبالتعويض في (1) يتضح لدينا أن

$$y' - 2xy = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} \qquad (5)$$

وهنا نحتاج إلى جمع المتسلسلتين في (5)، وليتم لنا ذلك لا بد من توحيد ترقيم الجمع لكلا المتسلسلتين ، أي أن تكون بداية الترقيمين متماثلة . كما أنه من المرغوب جدا – إن أمكن – توحيد القيم العددية لقوى x ، فمثلا لو كان الحد الأول في إحدى المتسلسلتين يساوي ثابتا في x ، فإننا نرغب أن يكون الحد الأول في المتسلسلة الأخرى كذلك محتويا على x أيضا . وهنا نعيد كتابة (5) على النحو

$$y' - 2xy = 1.\, a_1 x^0 + \sum_{n=2}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} \qquad (6)$$

وإذا تذكرنا أن ترقيم الجمع ما هو الا وسيط جامد يشبه تماما متغير التكامل في التكامل المحدود ، فإن بإمكاننا إجراء التبديل التالي على ترقيم الجمع في كل من المتسلسلتين في (6) : بالنسبة للمتسلسلة الأولى نضع $k = n - 1$ ، وبالنسبة للثانية $k = n + 1$. وبذلك يصبح الطرف الأيمن من (6) مساويا

$$a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2a_{k-1} x^k$$

وبجمع المتسلسلتين حدا حدا ينتج لدينا

$$y' - 2xy = a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+1)\, a_{k+1} - 2a_{k-1}\right] x^k = 0 \qquad (7)$$

وحتى تكون (7) مطابقة للصفر ، فإن جميع المعاملات يجب أن تكون مساوية للصفر، أي أن

$$a_1 = 0$$

$$(k+1)\, a_{k+1} - 2a_{k-1} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (8)$$

وهكذا فإن المعادلة (8) تمثل علاقة تكرارية تحدد قيم a_k ، وحيث أن $k+1$ تختلف عن الصفر لجميع قيم k المذكورة ، فإنه يمكن إعادة كتابة (8) على النحو

$$a_{k+1} = \frac{2a_{k-1}}{k+1} \qquad (9)$$

وبتكرار هذه الصيغة الأخيرة نحصل على التالي

$$k = 1 \;,\quad a_2 = \frac{2a_0}{2} = a_0$$

$$k = 2 \;,\quad a_3 = \frac{2a_1}{3} = 0$$

$$k = 3 \;,\quad a_4 = \frac{2a_2}{4} = \frac{a_0}{2} = \frac{a_0}{2!}$$

$$k = 4 \;,\quad a_5 = \frac{2a_3}{5} = 0$$

$$k = 5 \;,\quad a_6 = \frac{2a_4}{6} = \frac{a_0}{6} = \frac{a_0}{3!}$$

$$k = 6 \;,\quad a_7 = \frac{2a_5}{7} = 0$$

$$k = 7 \;,\quad a_8 = \frac{2a_6}{8} = \frac{a_0}{4 \,.\, 3!} = \frac{a_0}{4!}$$

وهكذا دواليك ! وعموما فإن

$$a_{2k} = \frac{a_0}{k!}$$

بينما

$$a_{2k+1} = 0$$

حيث ... ,$k = 1, 2$. وبالتعويض في إفتراضنا الأصلي (4) ، نجد أن

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$
$$= a_0 + 0 + \frac{a_0}{1!} x^2 + 0 + \frac{a_0}{2!} x^4 + \dots$$
$$= a_0 \left[1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots \right]$$
$$= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \qquad (10)$$

وحيث أن التكرار في (4) ترك قيمة a_0 اختيارية غير محددة ، فإننا نكون بذلك قد وجدنا الحل العام للمعادلة (1) .

٩-٢ النقاط العادية والنقاط الشاذة

تعريف. لتكن لدينا المعادلة التفاضلية ذات الرتبة n

$$b_0(x)\, y^{(n)} + b_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + b_n(x) y = R(x) \qquad (1)$$

إذا كانت قيمة الدالّة $b_0(x)$ عند النقطة x_0 لا تساوي الصفر ($b_0(x_0) \neq 0$) ، عندها يقال بأن x_0 نقطة عادية للمعادلة (1) . أما إذا كانت $b_0(x_0) = 0$ ، فإن x_0 تعتبر نقطة شاذة للمعادلة (1) .

هذا وسنفترض في هذا الباب أن المعاملات $b_0, b_1, \dots, b_n$ في المعادلة (1) جميعها كثيرات حدود ، وذلك للتيسير والتبسيط فقط . أما المعاملات التي تكون على صورة دوال تحليلية analytic functions ، أي تلك التي يمكن كتابتها على هيئة متسلسلة قوى حول نقطة ما ، فإن طريقة الحل والنتائج المتوقعة فتظل كما هي تقريبا دون تغيير كبير يذكر .

وفي هذا البند سنتناول حلول متسلسلات القوى حول نقطة عادية للمعادلة الخطية (1) ، ولن نتعرض لهذه الحلول حول نقاط شاذة للمعادلة (1) . وكقاعدة عامة ، فإننا عند التحدث عن النقاط الشاذة للمعادلة (1) ، فإننا نعني بها النقاط الشاذة في المستوى المركب المحدود أو المستوى المحدود إختصاراً، وليس في اللانهاية.

مثال ١. للمعادلة التفاضلية

$$\left(1-x^2\right)y'' - 3xy' - 2y = 0$$

نقطتان شاذتان هما $x = 1 , x = -1$ الممثلتان في الواقع لجذري المعادلة $1-x^2 = 0$ ، بينما للمعادلة التفاضلية

$$x\,y'' + xy' - y = 0$$

نقطة شاذة واحدة هي $x = 0$. أما المعادلة التفاضلية

$$y'' - 2xy' + y = 0$$

فليس لها نقاط شاذة في المستوى المحدود .

تمارين

فيما يلي أوجد النقاط الشاذة لكل معادلة في المستوى المحدود :

(1) $\left(x^2+4\right)y'' + 2xy' - 3y = 0$

(2) $2x\,(1-x)y'' - (x+1)\,y' + 2y = 0$

(3) $x^2y'' + 2xy' - 4y = 0$

(4) $\left(1+x^2\right)y'' - y = 0$

(5) $5xy'' - x^2y' + y = 0$

(6) $3y'' + y = 0$

(7) $x^3\left(x^2+1\right)y'' - xy' + 2y = 0$

(8) $(2x+1)(x-2)y'' + \left(x^2-3\right)xy' - xy = 0$

(9) $\left(x^2-3x+2\right)y'' + \left(x^3-1\right)y' + 2xy = 0$

(10) $\left(x^2+2x+2\right)y'' + x^2y' - 5xy = 0$

(11) $(x^2-5x-6)\,y''-2y'+xy=0$

(12) $(x^3-1)y''+x^2y'+y=0$

(13) $x\,(x^2+9)^2y''-2x^2y'+4y=0$

(14) $x^4y''-y=0$

(15) $(3x-1)y''+3xy'-y=0$

٩-٣ حلول المعادلات قرب نقطة عادية

قبل أن نشرع في سرد الخطوات والأمثلة يجدر بنا هنا أن نذكر نص نظرية هامة دون برهان ، ذلك أن البرهان معقد وطويل ويُوجد عادة في الكتب المتقدمة لمادة المعادلات التفاضلية .

نظرية وجود الحل. إذا كانت النقطة $x_0=0$ نقطة عادية للمعادلة التفاضلية

$$b_0(x)\,y''+b_1(x)\,y'+b_2(x)\,y=0 \qquad (1)$$

فإنه يمكن إيجاد متسلسلتي قوى مختلفتين على الهيئة .

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,x^n \qquad (2)$$

بحيث تمثل كل منهما حلا مستقلا للمعادلة (1) . وتتقارب كلا المتسلسلتين على الأقل لجميع قيم x المحققة للمتراجحة أو المتباينة $|x|<R$ حيث R هي المسافة بين نقطة الأصل وأقرب نقطة شاذة .

ولكي نحل المعادلة (1) يتوجب علينا إيجاد مجموعتين مختلفتين من المعاملات التي تتحدد قيمها بدلالة ثابتين اختياريين اثنين فقط ، وبالتالي ينتج لدينا متسلسلتا قوى مستقلتان خطيا $y_1(x), y_2(x)$ كلاهما معرف حول نفس النقطة العادية . أما الخطوات المتبعة لحل المعادلة (1) ذات الرتبة الثانية فتشبه تلك الخطوات التي مررنا بها في البند ٩-١ لحل المعادلة الخطية $y'-2xy=0$.

وبالتحديد ، فإننا نبدأ بافتراض وجود حل على هيئة متسلسلة القوى

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ومن ثم نعمل على إيجاد قيم المعاملات a_n حتى نجد المتسلسلة y نفسها . وفي الواقع فإننا سنخلص في النهاية إلى وجود ثابتين اختياريين فقط هما a_0, a_1 .
أما باقي المعاملات فستُحدد قيمها بدلالة هذين الثابتين a_0, a_1 .

مثال ١. حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y'' - y = 0 \qquad (3)$$

قرب النقطة العادية $x_0 = 0$.

الحل : من الواضح أن المعادلة (3) ليس لها نقاط شاذة في المستوى المحدود . ولذلك فإنه طبقا للنظرية السابقة يوجد حل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (4)$$

صالح لجميع قيم x الحقيقية . ولكي نجد y يجب أن نجد قيم المعاملات a_n لجميع قيم n الأكبر من الواحد وبدلالة الثابتين الاختياريين a_0, a_1 . بالتعويض من (4) في المعادلة (3) ينتج لدينا

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \qquad (5)$$

نقوم الآن بتغيير ترقيم الجمع في المتسلسلة الثانية من المعادلة (5) بحيث تشتمل المتسلسلة على المقدار x^{n-2} في حدها العام ، ومن ثم نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = 0 \qquad (6)$$

وبإضافة المتسلسلتين إلى بعضهما نحصل على

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[n\ (n-1)a_n - a_{n-2}\right] x^{n-2} = 0 \qquad (7)$$

مع ملاحظة أن قيمة كل من الحدين الأوليين في المتسلسلة الأولى تساوي صفرا .
ولكي تتحقق المعادلة (7) لا بد أن يكون كل معامل في المتسلسلة مساويا للصفر ، ومن ثم يجب تحقق المعادلة التالية لكل قيمة من قيم n المساوية أو الأكبر من اثنين

$$n\,(n-1)a_n - a_{n-2} = 0,\ n \geq 2$$

ويمكننا إعادة كتابة هذه العلاقة التكرارية على الصيغة

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{n\,(n-1)},\quad n \geq 2 \qquad (8)$$

ومن ثم نوظف هذه العلاقة (8) لإيجاد قيمة a_n حيث $n \geq 2$ وبمعلومية a_0, a_1 اللذين افترضنا أنهما اختياريان . وبذا يكون لدينا

$$a_2 = \frac{a_0}{2\,.\,1} = \frac{a_0}{2!}\ ,\ a_3 = \frac{a_1}{3\,.\,2} = \frac{a_1}{3!}$$

$$a_4 = \frac{a_2}{4\,.\,3} = \frac{a_0}{4!}\ ,\ a_5 = \frac{a_3}{5\,.\,4} = \frac{a_1}{5!}$$

$$a_6 = \frac{a_4}{6\,.\,5} = \frac{a_0}{6!}\ ,\ a_7 = \frac{a_5}{7\,.\,6} = \frac{a_1}{7!}$$

ومن ثم نجد أن

$$a_{2k} = \frac{a_0}{(2k)!},\quad k \geq 1 \qquad (9)$$

وكذلك

$$a_{2k+1} = \frac{a_1}{(2k+1)!},\quad k \geq 1 \qquad (10)$$

ومن الطبيعي الآن أن نعوض بالعلاقتين (9) ,(10) عن قيم المعاملات a_n في الصيغة المفترضة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \qquad (4)$$

وحيث أن لدينا علاقتين مختلفتين لتحديد كل من a_{2k+1} , a_{2k} فسنعيد كتابة (4)

على النحو التالي

$$y = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + a_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

ومن ثم نستعين بالعلاقتين (9) , (10) لنحصل على الحل العام للمعادلة (3) وهو

$$y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (11)$$

حيث a_0, a_1 ثابتان اختياريان . وعند اختيارنا للقيمتين $a_0 = a_1 = 1$ ، فإننا نحصل على الحل الخاص

$$y_1 = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) + \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

أما اختيارنا للقيمتين $a_1 = -1, a_0 = 1$ فيعطينا الحل الخاص

$$y_2 = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right) - \left(x + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = e^{-x}$$

وهي نتيجة كان يمكن الحصول عليها بمجرد الإطلاع على المعادلة (3) وإيجاد حلها العام باتباع طريقة الباب السادس حيث المعادلة المساعدة $m^2 - 1 = 0$ تعطينا الحل العام

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

مثال ٢. أوجد الحل العام للمعادلة

$$(x^2 + 4)y'' + 6xy' + 4y = 0 \qquad (13)$$

بالقرب من النقطة العادية $x_0 = 0$.

الحل : للمعادلة (13) نقطتان شاذتان في المستوى المحدود هما $2i , -2i$ ، ولذلك فنحن نعلم أن لهذه المعادلة حلا على الصيغة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (14)$$

صالحا لجميع قيم x حيث القيمة المطلقة لـ x أقل من 2 ($|x| < 2$) . ولكي نجد قيم المعاملات a_n حيث $n > 1$ ، فإننا نعوض عن y ومشتقاتها من (14) في المعادلة (13) لنحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4n(n-1)\, a_n x^{n-2}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} 6n\, a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n = 0$$

أو

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+5n+4)\, a_n x^n = 0 \qquad (15)$$

وبتحليل معاملات المتسلسلة الثانية ، وملاحظة أن كل من الحدين الأول والثاني في المتسلسلة الأولى يساوي الصفر ، نصل إلى

$$\sum_{n=2}^{\infty} 4n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+4)\, a_n x^n = 0$$

وبإعادة ترقيم الجمع للمتسلسلة الثانية لتبدأ من $n = 2$ نحصل على

$$\sum_{n=2}^{\infty} 4n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n+2)\, a_{n-2} x^{n-2} = 0 \qquad (16)$$

أو

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[4n(n-1) a_n + (n-1)(n+2)\, a_{n-2} \right] x^{n-2} \qquad (17)$$

ولكي تتحقق (17) فلا بد من أن يكون كل معامل مساوٍ للصفر ، أي أن تكون

$$4n(n-1)\, a_n + (n-1)(n+2)\, a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2 \qquad (18)$$

حيث a_0, a_1 ثوابت اختيارية كما هو متوقع . أما بقية المعاملات فيمكن إيجادها عن طريق المعادلة (18) . وحيث أن

$$n(n-1) \neq 0, \quad n \geq 2$$

فبإمكاننا أن نخلص إلى العلاقة التكرارية

$$a_n = -\frac{n+2}{4n} a_{n-2} \qquad (19)$$

وكما فعلنا في المثال السابق فإنه من المفيد أن نرتب العلاقات المتكررة في (19) في عمودين مختلفين ، ذلك لأن ترقيم الجمع الأيسر يختلف عن الأيمن باثنين فقط ، ومن ثم يكون لدينا العمودان

$$a_2 = -\frac{4}{8} a_0 \qquad a_3 = -\frac{5}{12} a_1$$

$$a_4 = -\frac{6}{16} a_2 \qquad a_5 = -\frac{7}{20} a_3$$

$$a_6 = -\frac{8}{24} a_4 \qquad a_7 = -\frac{9}{28} a_5$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{2k} = -\frac{(2k+2)}{8k} a_{2k-2}, \quad a_{2k+1} = -\frac{(2k+3)}{4(2k+1)} a_{2k-1}$$

وبضرب عناصر العمود الأيسر في بعضها البعض ننتهي إلى

$$a_2 a_4 a_6 \ldots a_{2k} = (-1)^k \frac{4.\ 6.\ 8\ \ldots (2k+2)}{8.\ 16.\ 24\ \ldots (8k)} a_0\, a_2 \ldots a_{2k-2}$$

وبعد التبسيط والاختصار نجد أن

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{2^k\ (k+1)!}{2^{2k}\ 2^k\ k!} a_0$$

$$= (-1)^k \frac{(k+1)}{2^{2k}} a_0, \quad k \geq 1$$

وبطريقة مماثلة نضرب عناصر العمود الأيمن في بعضها البعض فننتهي إلى القانون

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{(2k+3)}{3.\,2^{2k}} a_1 , \quad k \geq 1$$

وبالتعويض في (14) نجد أن الحل العام للمعادلة (13) على الفترة $(-2,2)$ هو

$$y = a_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)}{2^{2k}} x^{2k} \right] + \frac{a_1}{3} \left[3x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+3)}{2^{2k}} x^{2k+1} \right]$$

مثال ٣. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' - (x+1)y' - y = 0 \qquad (20)$$

حول النقطة العادية $x_0 = -1$.

الحل : وكما أشرنا سابقا فإن هدفنا من إيجاد حل حول النقطة $x_0 = -1$ ، يعني إيجاد حل على هيئة متسلسلة قوى يشتمل كل حد منها على أس صحيح للمقدار $x - x_0$ أو $x + 1$ في حالتنا هذه . وعلى هذا الحل أن يكون صالحا في منطقة مجاورة للنقطة x_0 ومشتملة عليها كمثل الفترة التي يقع مركزها في x_0 ، ولها نصف قطر موجب .

وأول ما نبدأ به الحل هو ازاحة محوري المستوى باختيار $v = x + 1$ لتصبح المعادلة (20) على النحو

$$\frac{d^2y}{dv^2} - v\frac{dy}{dv} - y = 0 \qquad (21)$$

ومن ثم نقرر أن

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v^n \qquad (22)$$

وبالتعويض في (21) نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n v^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n v^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n v^n = 0 \qquad (23)$$

وبازاحة ترقيم الجمع ننتهي إلى

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n v^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\, a_{n-2}\, v^{n-2} = 0$$

أو

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[n(n-1)\, a_n - (n-1)\, a_{n-2} \right] v^{n-2} = 0$$

ومن ثم ننتهي إلى القانون

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{n}, \quad n \geq 2 \qquad (24)$$

وبوضع العلاقة التكرارية (24) في عمودين نحصل على

$$a_2 = \frac{a_0}{2} \qquad a_3 = \frac{a_1}{3}$$

$$a_4 = \frac{a_2}{4} \qquad a_5 = \frac{a_3}{5}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$a_{2k} = \frac{a_{2k-2}}{2k} \qquad a_{2k+1} = \frac{a_{2k-1}}{2k+1}$$

وبضرب عناصر كل عمود في بعضها البعض نحصل على العلاقتين

$$a_{2k} = \frac{a_0}{2.\,4.\,6 \ldots (2k)} = \frac{a_0}{2^k\, k\,!}, \quad k \geq 1$$

$$a_{2k+1} = \frac{a_1}{3.\,5.\,7 \ldots (2k+1)} = \frac{2^k\, k\,!}{(2k+1)!}\, a_1, \quad k \geq 1$$

وبالتالي فالحل المطلوب للمعادلة (21) هو

$$y = a_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v^{2k}}{2^k k\,!} \right] + a_1 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k\, k\,!}{(2k+1)!}\, v^{2k+1} \right]$$

وحيث أن $v = x + 1$ ، فإن الحل العام للمعادلة (20) هو

$$y = a_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2k}}{2^k\, k\,!} \right] + a_1 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k\, k!}{(2k+1)!}\, (x+1)^{2k+1} \right]$$

وهكذا قدمنا للقارئ ثلاثة أمثلة مختلفة في هيئة المعادلة التفاضلية ، ففي المثال الأول كانت المعادلة التفاضلية ذات معاملات ثابتة ولم تكن لها نقاط شاذة ، بينما كان للمعادلة التفاضلية في المثال الثاني معاملان غير ثابتين أحدهما للحد ذي الرتبة العليا y'' ، وكان لها أيضا نقطتان شاذتان في المستوى المحدود . أما المثال الثالث فاشتمل على معادلة كان المتغير فيها معامل الحد الأوسط y' ولم تكن لها هي الأخرى نقاط شاذة ، وكان المطلوب إيجاد صيغة المتسلسلة حول النقطة $x = -1$ على عكس المثالين الأولين اللذين تناولا نقطة الأصل كنقطة لإيجاد صيغة المتسلسلة حولها.

وفي الأمثلة الثلاثة السابقة تم استخدام العلاقة التكرارية بنفس الطريقة لإيجاد العلاقة التي تربط بين a_k وكلا من a_0, a_1 وذلك عن طريق ضرب عناصر العمود في بعضها البعض . وهذه الطريقة قد لا تجدي أحيانا . وفيما يلي مثالا يوضح هذه الملاحظة .

مثال ٤. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$y'' + (x-1)y' + y = 0 \qquad (25)$$

حول النقطة العادية $x_0 = 0$.

الحل : كما سبق فإن $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. بالتعويض في (25) نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

وبازاحة ترقيم الجمع كما فعلنا في الأمثلة السابقة ننتهي إلى المعادلة

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[n(n-1)\, a_n - (n-1)\, a_{n-1} + (n-1)\, a_{n-2} \right] x^{n-2} = 0$$

ومن ثم نحصل على العلاقة التكرارية

$$a_n = \frac{1}{n}\left(a_{n-1} - a_{n-2}\right), \quad n \geq 2$$

حيث a_0, a_1 ثوابت اختيارية . هذا ويمكن إيجاد قيم a_n بدلالة a_0, a_1 عن

طريق التعويض المباشر . فمثلا

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 - a_0\right)$$

بينما

$$a_3 = \frac{1}{3}\left(a_2 - a_1\right) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(a_1 - a_0\right) - a_1\right] = -\frac{1}{6}\left(a_1 + a_0\right)$$

وهكذا يتضح لنا أن الطريقة العامة لإيجاد معاملات المتسلسلة قد تختلف عن طريقة الأمثلة الثلاثة السابقة كما أسلفنا .

وأخيرا نشير من بعيد إلى حل متسلسلة القوى لمعادلة تفاضلية متجانسة ذات رتبة أعلى من أثنين . فالزيادة هنا لا تعني أي جديد في خطوات حل المعادلة ، وإنما تعني مزيدا من العمليات الجبرية ومزيدا من الحاجة إلى الدقة في متابعة تغيير ترقيمات الجمع ، كما تعني بالطبع زيادة عدد الثوابت الاختيارية ليصبح عددها مساويا لرتبة المعادلة . وسنكتفي هنا بذكر نص المثال التالي وكتابة الجواب النهائي المطلوب على أن نترك تفاصيل الحل للقارئ .

مثال ٥. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y''' + x^2\, y'' + 5x\, y' + 3y = 0$$

الحل : سنكتفي كما أشرنا قبل قليل بتسطير الجواب النهائي دون تفصيل ، وهو على النحو التالي

$$y = a_0\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{3k}}{2.\ 5.\ 8 \ldots (3k-1)}\right] + a_1\left[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{3k+1}}{3^k\, k\,!}\right]$$

$$+\, a_2\left[x^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{3k+2}}{4.\ 7.\ 10 \ldots (3k+1)}\right]$$

وهو حل قرب النقطة $x_0 = 0$ وصالح لجمع قيم x الحقيقية المحدودة .

أما إذا كانت المعادلة غير متجانسة ، وكان الطرف الأيمن متسلسلة قوى ، فإن الأمر لن يزداد سوءا إلى حد كبير ، وإنما هي نفس الخطوات ، لكن بدلا من مساواة كل معامل في المتسلسلة النهائية بالصفر ، فإن الوضع هنا يتطلب مساواة كل معامل في المتسلسلة التي في الطرف الأيسر لنظيره في الطرف الأيمن . ومن ثم إكمال الخطوات الجبرية المتبقية لاستخراج الحل الخاص المطلوب . أما الدالة المكملة فهي كما هو معروف ناتجة عن حل المعادلة المتجانسة ذات العلاقة . وفيما يلي مثال لمعادلة تفاضلية غير متجانسة مع حلها العام في صورته النهائية .

مثال ٦. أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y'' + xy' + 3y = x^2$$

الحل : الجواب النهائي هو

$$y = \frac{1}{5}\left(x^2 - \frac{2}{3}\right) + a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(2k+1)}{2^k\,k\,!}\,x^{2k}$$

$$+ a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(k+1)}{1.\,3.\,5\,\ldots\,(2k+1)}\,x^{2k+1}$$

وهو حل صالح لجميع قيم x المحدودة .

٤-٩ ملخص الباب

يُعتبر هذا الباب امتدادا للباب الذى سبقه من حيث تناوله للمعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة ، الا أنه أكثر فعالية وأضمن وصولا إلى الحل المطلوب . ففي مقدمة الباب أعطينا ملخصا موجزا عن أهم خواص متسلسلات القوى ذات العلاقة بموضوع الباب ، كما أعطينا مثالا مبسطا يزيل بعض الغموض الذي قد يعلق بذهن القارئ في تلك المرحلة .

وفي البند الثاني ذكرنا تعريف النقاط العادية والنقاط الشاذة لمعادلة تفاضلية من الرتبة n . وذكرنا أن جل تركيزنا سيكون على إيجاد حلول متسلسلات القوى قرب نقطة الأصل ، وافترضنا أن جميع المعاملات ستكون كثيرات حدود بالنسبة لهذا الباب . ويمكننا إعادة تسطير الجملتين السابقتين فنقول بأن النقطة $x_0 = 0$ هي نقطة عادية للمعادلة التفاضلية ذات الرتبة الثانية

$$b_0(x)\, y'' + b_1(x)\, y' + b_2(x)\, y = 0 \qquad (1)$$

إذا كانت $b_0(0) \neq 0$ ، وكانت المعاملات b_0, b_1, b_2 كثيرات حدود غير قابلة للقسمة على عامل مشترك .

وفي البند الثالث ذكرنا بأن أي حل للمعادلة (1) لابد أن يكون على هيئة متسلسلة القوى

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \qquad (2)$$

ولكي نجد y لا بد أن نجد المعاملات a_n ، وذلك بالتعويض المباشر في (1) . وبعد إجراء العمليات الجبرية الملائمة نحصل على علاقة تكرارية ناتجة عن مساواة المعامل النهائي للمقدار x^k بالصفر . وبتكرار هذه العلاقة التكرارية نجد أن المعاملات تتعين بدلالة ثابتين اختياريين فقط هما a_0, a_1 ، وبالتالي ننتهي إلى حلين مستقلين خطيا $y_1,\ y_2$ يمثل كلا منهما متسلسلة قوى تتقارب لجميع قيم x الواقعة داخل الفترة $(-R\ ,\ R)$ حيث R المسافة من نقطة الأصل إلى أقرب نقطة شاذة للمعادلة .

٩-٥ تمارين عامة

أوجد لكل من المعادلات التفاضلية التالية حل متسلسلة القوى بالقرب من نقطة الأصل ، وحدد منطقة صلاحية الحل :

(1) $y' - x^2 y = 0$ (2) $y'' - y' = 0$

(3) $(1-x)y' - y = 0$ (4) $y'' - xy = 0$

(5) $y'' + y = 0$ (6) $y'' + 3xy' + 3y = 0$

(7) $y'' - x y' + 4y = 0$ (8) $(x-1)y'' + y' = 0$

(9) $(4x^2+1)y'' - 8y = 0$

(10) $(1-x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0$

(11) $(1+x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0$

(12) $(1+x^2)y'' + 10xy' + 20y = 0$

(13) $(x^2+4)y'' + 2xy' - 12y = 0$

(14) $y'' + 2xy' + 5y = 0$

(15) $(1-x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0$

(16) $(x^2-9)y'' + 3xy' - 3y = 0$

(17) $2y'' + xy' - 4y = 0$

(18) $(4x^2-1)y'' - 6xy' + 4y = 0$

(19) $(1+2x^2)y'' + 3xy' - 3y = 0$

(20) $(1+2x^2)y'' - 5xy' + 3y = 0$

(21) أوجد حلا للمعادلة $y'' + (x-2)y = 0$ بالقرب من النقطة $x = 2$.

(22) أوجد حلا للمعادلة التفاضلية $y'' + (1-x)^2 y' + 4(1-x)y = 0$ حول النقطة $x = -1$.

(23) أوجد حلا للمعادلة التفاضلية $(x^2+2x-2)y'' - 4(x+1)y' + 6y = 0$ حول النقطة $x = -1$.

(24) أوجد حلا للمعادلة التفاضلية $y'' + xy = 2;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$ حول النقطة $x_0 = 0$.

(25) أوجد حلا للمعادلة التفاضلية $y'' - xy' + y = 0$ حول النقطة $x_0 = 0$.

أوجد حلول المعادلتين التاليتين باستعمال متسلسلات القوى المحققة للشروط الابتدائية المعطاة :

(26) $(x-1)y'' - xy' + y = 0;\ y(0) = -2,\ y'(0) = 6$

(27) $y'' - 2xy' + 8y = 0;\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0$

الباب العاشر

الأنظمة الخطية للمعادلات التفاضلية

مقدمة ■ طريقة الحذف الأولى ■ حلول الأنظمة ذات المعاملات الثابتة من الرتبة الأولى ■ ملخص الباب .

١٠-١ مقدمة

في هذا الباب القصير نوعاً ما ، سنتناول الأنظمة الخطية للمعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة . ونعني بالنظام الخطي هنا ، النظام المكون من معادلتين تفاضليتين أو اكثر . وغالبا ما تحتوي كل معادلة على أكثر من دالّة تابعة لنفس المتغير x . أما عدد الدوالّ المجهولة فيساوي عدد المعادلات التفاضلية التي يتكون منها النظام . والمطلوب عادة إيجاد حل يحقق النظام آنيا ، أي يحقق جميع المعادلات التفاضلية في نفس الوقت .

مثال ١. المعادلتان التفاضليتان الآنيتان

$$y' - 3y + v' - v = 5$$
$$2y' - y + v'' - 2v = x$$

تمثلان نظاما خطيا حيث x هو المتغير المستقل بينما v , y المتغيران التابعان للمتغير x . لاحظ أن المطلوب هو إيجاد المجهولين v , y كدوال تابعة للمتغير x ، وأن هذين المجهولين يجب أن يحققا المعادلتين أعلاه في نفس الوقت .

مثال ٢. مجموعة المعادلات التفاضلية الآنية

$$y'' - 3y' + u' - v = e^x$$
$$y' - u'' + 2u - v' = x$$
$$v'' - 2y + u' - u = -2$$

تمثل نظاما خطيا يشمل المتغير المستقل x والمتغيرات التابعة v, u, y .

ولسهولة التعامل مع النظام الخطي المكون من معادلتين فقط ، فإننا سنتناول في الفصلين التاليين هذا النظام فقط ، ولكن يمكن تطبيق نفس الخطوات لتشمل الأنظمة الأخرى ذات العدد الأكبر من المعادلات .

١٠-٢ طريقة الحذف الأولي

وهي تشبه إلى حد كبير طريقة الحذف الأولي المستعملة في حل المعادلات الجبرية الخطية الآنية في أكثر من مجهول ، الا أن الأمر يتطلب دقة أكبر هنا بسبب الاشتقاقات المختلفة لكل متغير . أما الهدف الأساسي فهو السعي إلى التخلص من المتغيرات التابعة كلها الا واحدا تضمه معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة يسهل إيجاد حلها بالطرق المختلفة التي درسناها سابقا سواء كانت المعادلة متجانسة أم لم تكن .

وفيما يلي نستعرض بالتفصيل خطوات حل أحد هذه الأنظمة الخطية باستعمال طريقة الحذف الأولي مما سيساهم على استيعاب مادة هذا الباب .

مثال ١. لنفترض أننا نسعى لإيجاد حل للنظام الخطي

$$\begin{aligned} y'' + y - 2v' &= 2x \\ 2y' - y + v' - 2v &= 7 \end{aligned} \qquad (1)$$

حيث x هو المتغير المستقل بينما v, y متغيران تابعان . لنعد كتابة (1) باستعمال المؤثرات التفاضلية $D^n = \dfrac{d^n}{dx^n}$ لنحصل على

$$\begin{aligned} (D^2+1)y - 2Dv &= 2x \\ (2D-1)y + (D-2)v &= 7 \end{aligned} \qquad (2)$$

والآن لنحاول التخلص من أحد المتغيرات التابعة لننتهي إلى معادلة واحدة في المتغير الآخر . ولنبدأ بالتخلص من v وذلك بالتأثير على المعادلة الأولى بالمؤثر $D-2$ والتأثير على الثانية بالمؤثر $2D$ مع تذكر أن عملية التأثير بواسطة المؤثرات التفاضلية عملية تبادلية لأن المعاملات ثابتة . إذا

$$(D^2+1)(D-2)y-2D(D-2)v=(D-2)(2x)=2-4x$$
$$2D(2D-1)y+2D(D-2)v=2D(7)=0$$

وبالجمع نحصل على المعادلة غير المتجانسة

$$\left[(D^2+1)(D-2)+2D(2D-1)\right]y=2-4x$$

أو

$$(D^3+2D^2-D-2)y=2-4x \qquad (3)$$

وبطريقة مماثلة يمكن التخلص من y لنحصل على

$$(D^3+2D^2-D-2)v=3+2x \qquad (4)$$

ومن المعادلتين (3) ، (4) نحصل فورا على

$$y=2x-2+a_1e^x+a_2e^{-x}+a_3e^{-2x} \qquad (5)$$

و

$$v=-x-1+b_1e^x+b_2e^{-x}+b_3e^{-2x} \qquad (6)$$

ويتبقى علينا اختيار الثوابت الاختيارية a_i, b_i حيث $i=1,2,3$ وبحيث تتحقق المعادلات الأصلية المكونة للنظام (1) ، فلا يكفي تحقيق المعادلتين (3) , (4) الناتجتين من المعادلتين الأصليتين بعد إكمال خطوات الحذف الأولي .

ولكي نكمل المطلوب فإننا نجد باستعمال (5) الاشتقاقين الأول والثاني للدالة y ، وكذلك نجد مشتقة الدالة v باستعمال (6) ، ومن ثم نقوم بالتعويض عن هذه الدوال ومشتقاتها في المعادلة الأولى من (2) لنحصل على المتطابقة

$$\begin{aligned}&2x-2+2a_1e^x+2a_2e^{-x}+5a_3e^{-2x}\\&\quad-2\left(-1+b_1e^x-b_2e^{-x}-2b_3e^{-2x}\right)=2x\end{aligned} \qquad (7)$$

وهذا يعني تحقق المعادلات الخطية الثلاث التالية

$$\begin{aligned}2a_1-2b_1&=0\\2a_2+2b_2&=0\\5a_3+4b_3&=0\end{aligned} \qquad (8)$$

وبالتالي ينتج لدينا أن

$$b_1=a_1 \quad , \quad b_2=-a_2 \quad , \quad b_3=\frac{-5a_3}{4}$$

هذا ويمكن الحصول على نفس النتيجة بالتعويض في المعادلة الثانية من النظام (2) . ومن ثم فمجموعة حلول النظام (2) هي

$$y = 2x - 2 + a_1 e^{x} + a_2 e^{-x} + a_3\, e^{-2x}$$

$$v = -x - 1 + a_1 e^{x} - a_2\, e^{-x} - \frac{5}{4} a_3\, e^{-2x} \qquad (9)$$

وهناك طريقة أخرى لمعالجة النظام (2) تتلخص في إيجاد المعادلة (3) ومن ثم إيجاد y كما في المعادلة (5). أما الخطوة التالية فهي إيجاد معادلة تعطي v بمعلومية y ، أي أننا نسعى لنزيل من النظام (2) جميع الحدود التي تحتوي على أي مشتقة للدالّة v . فمثلا لو ضربنا المعادلة الثانية من النظام (2) في 2 ثم أضفناها إلى المعادلة الأولى لانتهينا إلى

$$(D^2 + 4D - 1)y - 4v = 2x + 14$$

أو

$$v = \frac{1}{4}\left[(D^2 + 4D - 1)y - 2x - 14\right]$$

وبالتعويض عن y من (5) نحصل مباشرة على (9) كما هو مطلوب .

تمارين

استخدم طريقة الحذف الأولي لإيجاد حلول للأنظمة الخطية التالية :

(1) $u' = 4u - v$

$v' = -4u + 4v$

(2) $v' + y' + 2y = 0$

$v' - 3v - 2y = 0$

(3) $u' = 2u - v$

$v' = u$

(4) $y' = 2y + z$

$z' = -4y + 2z$

(5) $v' = -y + x$

$y' = v - x$

(6) $w' = w - y - z$

$y' = y + 3z$

$z' = 3y + z$

(7) $x' = 3x - y - 1$

$y' = x + y + 4e^t$

(8) $(D^2 + 5)v - 2y = 0$

$-2v + (D^2 + 2)y = 0$

(9) $x'' = 4y + e^t$

$y'' = 4x - e^t$

(10) $2(D+1)y + (D-1)w = x + 1$

$(D+3)y + (D+1)w = 4x + 14$

(11) $2Dx + (D-1)y = t$

$Dx + Dy = t^2$

(12) $(D+1)y + (D-4)v = 6\cos x$

$(D-1)y + (D^2+4)v = -6\sin x$

(13) $y'' - y + 5v'' = x$

$2y' - v'' + 4v = 2$

(14) $Dx = y$

$Dz = x$

(15) $2u' + v' - v + w' + 2w = 0$

$u' + 2u + 2v' - 3v - w' + 6w = 0$

$2u' - v' - 3v - w' = 0$

$$(16)\quad \begin{aligned} x' - 6y &= 0 \\ x - y' + z &= 0 \\ x + y - z' &= 0 \end{aligned}$$

$$(17)\quad \begin{aligned} y'' + v' - v &= 0 \\ y' + 3y + v' - 4v + 3w &= 0 \\ 2y' - y + w' - w &= 0 \end{aligned}$$

١٠-٣ حلول الأنظمة الخطية ذات المعاملات الثابتة من الرتبة الأولى

لن نتناول بالتفصيل هذا البند ، وإنما سنشير من بعيد إلى أهم الأفكار التي يمكن أن تُبنى عليها بقية التفاصيل التي تكتسب أهمية خاصة في حد ذاتها. فالتفاصيل تشمل بتوسع دراسة المصفوفات ، خصائصها ، معكوساتها ، مدى ارتباطها بإيجاد حلول هذه الأنظمة المشار إليها في عنوان البند .

وتكتسب هذه الأنظمة ذات الرتبة الأولى أهميتها البالغة لكونها نتاج أنظمة ذات رتب أعلى . وبمعنى آخر ، فإنه بالإمكان تحويل معظم أنظمة المعادلات الخطية ذات الرتبة العليا إلى أنظمة خطية من الرتبة الأولى .

والمثال التالي يوضح ما نهدف إليه من تحويل الرتبة العليا إلى الرتبة الأولى .

مثال ١. لننظر إلى المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الثانية

$$y'' - 6y' + 8y = x - 2 \qquad (1)$$

فلو اخترنا الإحلال $u = y'$ لأصبحت المعادلة (1) على النحو

$$u' = 6u - 8y + x - 2$$

وبذلك نكون قد أحللنا محل المعادلة (1) النظام الخطي التالي ذي الرتبة الأولى

$$\begin{aligned} y' &= u \\ u' &= 6u - 8y + x - 2 \end{aligned} \qquad (2)$$

وبنفس الأسلوب فانه يمكن إعادة كتابة المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الثالثة

$$y''' - y'' + 2y' - 3y = e^x$$

كنظام مكون من معادلات خطية من الرتبة الأولى ، وذلك باستعمال التعويض

$$u = y' \ , \ v = u' = y''$$

وبذلك تتحول المعادلة (3) إلى

$$v' - u' + 2u - 3y = e^x$$

أو

$$v' = v - 2u + 3y + e^x$$

ومن ثم ننتهي إلى نظام من المعادلات ذات الرتبة الأولى المكافئة للمعادلة(3)

$$\begin{aligned} y' &= u \\ u' &= v \\ v' &= v - 2u + 3y + e^x \end{aligned} \qquad (4)$$

أما النظام الثنائي

$$\begin{aligned} y'' - y + 5v' &= \cos x \\ 2y' - v'' + 4v &= e^x - x \end{aligned} \qquad (5)$$

فنستعمل معه التعويض $u = v'$ وكذلك $w = y'$ فننتهي إلى النظام

$$\begin{aligned} u' &= 4v + 2w + x - e^x \\ v' &= u \\ w' &= -5u + y + \cos x \\ y' &= w \end{aligned} \qquad (6)$$

وأما السؤال الذى يبرز هنا مباشرة هو : ماذا يجدي تحويل المعادلات والأنظمة ذات الرتبة العليا إلى أنظمة من الرتبة الأولى ؟

وكما أشرنا في بداية البند فلن نخوض في الاجابة التفصيلية الكاملة ، لأن ذلك سيقودنا حتما إلى دراسة سريعة شاملة لنظرية المصفوفات وخواصها الجبرية – وليس هذا مجاله هنا – وإنما سنكتفي بالاشارة إلى المثال التالي وبعض التعليق البسيط الذي يليه .

مثال ٢ . أوجد حلا للنظام الخطي ذي الرتبة الأولى

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 4y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - y \qquad (7)$$

الحل : بإمكاننا إعادة كتابة النظام (7) على النحو

$$(D-2)x - 4y = 0$$
$$-x + (D+1)y = 0 \qquad (8)$$

وبالتأثير على المعادلة الأولى بالمؤثر $D+1$ وضرب الثانية في 4 ثم جمعهما نحصل على

$$\left(D^2 - D - 6\right)x = 0 \qquad (9)$$

وبأسلوب مماثل يمكننا التخلص من x في النظام (2) لنحصل على

$$\left(D^2 - D - 6\right)y = 0 \qquad (10)$$

وبذلك نستنتج أن حلي النظام (7) يجب أن يكونا على الهيئة

$$x = c_1\, e^{3t} + c_2\, e^{-2t}$$
$$y = c_3\, e^{3t} + c_4\, e^{-2t}$$

علما بأن هناك علاقة تربط بين الثوابت الاختيارية c_1, c_2, c_3, c_4 يمكن إيجادها عن طريق التعويض مرة أخرى في النظام (7) .

هذا ويمكننا معالجة النظام (7) منذ البداية إذا توقعنا أن طبيعة المعادلتين اللتين تشكلان النظام تستوجب وجود حلول من النوع

$$x = c_1\, e^{mt}$$
$$y = c_2\, e^{mt} \qquad (11)$$

على أن تحدد الثوابت c_1, c_2, m بالتعويض في النظام (7) والذي سيفضي تنفيذه إلى المعادلتين الجبريتين التاليتين :

$$m\, c_1 e^{mt} = 2c_1 e^{mt} + 4c_2 e^{mt}$$
$$m\, c_2 e^{mt} = c_1 e^{mt} - c_2 e^{mt}$$

أو

$$\begin{aligned}(m-2)c_1-4c_2&=0\\ -c_1+(m+1)c_2&=0\end{aligned} \qquad (12)$$

ومما نعلمه من مبادئ الجبر الخطي أن النظام الجبري (12) لا يوجد له حل غير صفري الا إذا كانت المحددة

$$\begin{vmatrix} m-2 & -4 \\ -1 & m+1 \end{vmatrix} \qquad (13)$$

صفرية . أي أنه يُشترط تحقق المعادلة

$$(m-2)(m+1)-4=0$$

أو

$$m^2-m-6=(m-3)(m+2)=0$$

وبالاضافة فإن كون $m=3$ سيفرض على النظام (12) تحقق الشرط $c_2=\frac{c_1}{4}$. أما $m=-2$ فسيؤدي إلى تحقق الشرط $c_2=-c_1$. وبالتالي فهناك حلان مختلفان على الهيئة (11) هما

$$\begin{aligned}x&=c_1e^{3t}, \quad y=\frac{c_1}{4}e^{3t}\\ x&=c_1e^{-2t}, \quad y=-c_1e^{-2t}\end{aligned} \qquad (14)$$

ملحوظة . هذه الاضافة جعلت لأولئك الذين لديهم خلفية لا بأس بها عن المصفوفات وحل المعادلات الآنية باستخدام المصفوفات . فالنظام (7) يمكن كتابته على الصورة

$$X'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=AX \qquad (15)$$

ولو كان

$$C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لوجدنا أن

$$mI-A=\begin{pmatrix} m-2 & -4 \\ -1 & m+1 \end{pmatrix}$$

هي المصفوفة التي لها نفس المحددة المعطاة في (13) .

وبافتراض أنه لا بد من وجود حلول من النوع (11) فإنه يمكننا كتابة ذلك النوع من الحلول على الصورة

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{mt} = C\, e^{mt}$$

عندها نجد أن (15) يفضي بنا إلى المعادلة المصفوفية

$$C\, m\, e^{mt} = AC\, e^{mt}$$

والتي يمكن إعادة كتابتها على النحو

$$(mC - AC)e^{mt} = 0$$

وحيث أن $C = IC$ ، فإن

$$(mI - A)C\, e^{mt} = 0 \qquad (16)$$

وبما أننا نسعى إلى تحقيق (16) لجميع قيم t فلا بد أن يكون

$$(mI - A)C = 0 \qquad (17)$$

ولا يمكن أن يكون للمعادلة (17) حل غير صفري الا إذا كانت محددة المصفوفة $mI - A$ تساوي الصفر ، أي

$$|mI - A| = 0 \qquad (18)$$

وهي كثيرة حدود من الدرجة الثانية في المجهول m . وهي تعتمد فقط على المصفوفة A . وبحل (18) نجد أن قيم m التي تحققها هي $3, -2$.

ولو أخذنا $m = 3$ في (17) لحصلنا على

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ومنه نحصل على $c_1 - 4c_2 = 0$ أو $c_2 = \frac{c_1}{4}$. وفي الصيغة المصفوفية

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \end{pmatrix} C_1$$

وهو ما حصلنا عليه في السطر الأول من (14) . وللحصول على السطر الثاني نعوض عن $m = -2$ في المعادلة (17) فنجد

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ومنه $4c_1 + 4c_2 = 0$ أو $c_1 = -c_2$.

مثال ٣. في حالة استيعاب الملحوظة الاضافية السابقة ، فإنه يمكن باسلوب مماثل إيجاد حلول النظام $X' = AX$ حيث

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

تمارين

فيما يلي أوجد نظاما من المعادلات ذات الرتبة الأولى يحل محل المعادلة المعطاة :

(1) $y'' + 6y' - 3y = e^x - 2$

(2) $y'' - 3y' + 5y = \sin x$

(3) $y'' + py' + qy = f(x)$

(4) $y''' - 6y'' + 4y' = e^t - t$

(5) $y''' + py'' + qy' + ry = f(x)$

(6) $y^{(4)} - y = 0$

فيما يلي أوجد نظاما من المعادلات ذات الرتبة الأولى يحل محل النظام الثنائي المعطى :

(7) $(D^2 - D + 5)x + 2D^2y = e^t - 1$

$-2x + (D^2 + 2)y = 3t - t^2$

(8) $v' - 2v + 2w' = 2 - 4e^{2x}$

$2v' - 3v + 3w' - w = 0$

(9) $(3D + 2)v + (D - 6)w = 5e^x$

$(4D + 2)v + (D - 8)w = 5e^x + e^{-x} - 1$

(10) $(D^2 + 6)y + Dv = 0$

$(D + 2)y + (D - 2)v = 2$

فيما يلي أوجد حلا لكل من الأنظمة الخطية التالية :

(11) $\frac{dx}{dt} = 8x - 3y$

$\frac{dy}{dt} = 16x - 8y$

(12) $x' = x$

$y' = -2x + 2y$

(13) $x' = 4x + 3y$

$y'' = -4x - 4y$

(14) $x' = 3x + 3y$

$y' = -x - y$

(15) $x' = 12x - 15y$

$y' = 4x - 4y$

(16) $x'' = x + 2y - z$

$y' = 2x + y + z$

$z' = -x + y'$

٤-١٠ ملخص الباب

خُصص هذا الباب لدراسة مبسطة للأنظمة الخطية المكونة من أكثر من معادلة تفاضلية . وقد تم التركيز على الأنظمة ذات المعاملات الثابتة دون غيرها من المعاملات المتغيرة ، كما آثرنا إعطاء مزيد من الأهتمام للأنظمة المكونة من معادلتين فقط ، وإن لم يكن النقاش مقصورا عليها وحدها..

وفي البند الثاني استعرضنا طريقة الحذف الأولي وهي تهدف إلى التخلص من المتغيرات الا واحدا حيث يكون الناتج معادلة تفاضلية خطية ذات رتبة تساوي أو تتجاوز الأولى .

وقد أشرنا في نفس البند إلى طريقتين أخريين يؤديان إلى نفس النتيجة ، وربما اختلفتا عن طريقة الحذف الأولي في حجم العمليات الجبرية ونوعيتها .

أما البند الثالث فقد أشار باقتضاب إلى حلول الأنظمة الخطية ذات المعاملات الثابتة والمكونة من معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى . ولهذه الأنظمة أهميتها البالغة اذ أنه بالإمكان تحويل معظم الأنظمة الأخرى المكونة من معادلات ذات رتبة أعلى إلى أنظمة مكونة من معادلات من الرتبة الأولى ، وإن ازداد عدد المعادلات غالبا الا أن ذلك يقابله إنخفاض الرتبة إلى الأولى ومن ثم تسهل عملية حل النظام الأصلي بعد إحلال النظام الجديد محله .

الباب الحادي عشر

تطبيقات على المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الثانية

■ مقدمة ■ الاهتزازات الميكانيكية والحركة التوافقية البسيطة ■ الاهتزازات غير المتخامدة ■ الرنين ■ الاهتزازات المتخامدة ■ البندول البسيط ■ الدوائر الكهربائية البسيطة .

١١-١ مقدمة

في هذا الباب وكما في الباب الثالث سنقتصر على استعراض بعض التطبيقات العملية على المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الثانية . وربما كان هذا الباب مراجعة جيدة لما درسناه في الأبواب السابقة عن حلول المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الثانية المتجانسة منها وغير المتجانسة .

ولن نبتعد في هذا الباب عن التطبيقات الأساسية المعروفة والمتداولة في معظم الكتب الأولية التي تغطي مادة المعادلات التفاضلية لطلاب الجامعة في سنتهم الثانية . وتشمل هذه التطبيقات الحركات التوافقية البسيطة والاهتزازات الميكانيكية ومنها الاهتزازات الحرة المتخامدة وغير المتخامدة ، وكذلك الرنين .

كما تشمل هذه التطبيقات كذلك التطبيقات القسرية والدوائر الكهربائية وغيرها من التطبيقات العديدة .

أما البنود التالية فستغطي بعض هذه التطبيقات .

١١-٢ الاهتزازات الميكانيكية والحركة التوافقية البسيطة

لا يكاد يمر يوم الا ونواجه أنواعا متعددة من الاهتزازات الميكانيكية ، فارتجاج السيارة بسبب المطبات الاسفلتية ، واهتزاز الجسور بسبب الرياح والكثافة المرورية ، وكذلك تذبذب جناح الطائرة بسبب اهتزاز المحركات ومقاومة الهواء ، كل هذه امثلة عامة معروفة . ولدراسة هذه الظاهرة فسنبدأ بنظام

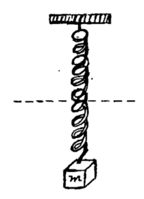
ميكانيكي بسيط مكون من زنبرك مثبت من أعلاه إلى جسم ثابت صلب ، ومعلق من طرفه الأيسر كتلة صلبة (انظر الشكل ١١-١) . و بصفة عامة فإن الزنبرك سيخضع لقانون هوك Hook's law ، والذي ينص على أنه إذا شُد أو ضُغط زنبرك ، فإن مقدار التغير الناتج في طول الزنبرك يتناسب مع القوة المؤثرة عليه . وعند إزالة هذه القوة المؤثرة فإن الزنبرك سيعود إلى وضعه الأصلي مع الاحتفاظ بطوله وبخصائصه الأخرى دون تغيير .

وهكذا فإن لكل زنبرك ثابتا عدديا مرتبطا به يساوي مقدار القوة المؤثرة على الزنبرك مقسوما على مقدار الازاحة الناتجة عن تأثير هذه القوة ، وبمعنى آخر فلو أن قوة قدرها F كجم أدت إلى تمدد الزنبرك s من الأمتار ، فإن العلاقة الخطية

$$F = k s \qquad (1)$$

تحدد مقدار " ثابت الزنبرك k " ووحدته كجم/م . فمثلا لو أثّرت قوة قدرها 5 كجم على الزنبرك فازاحته بمقدار 25 سم إلى الأسفل ، فإن ثابت الزنبرك يساوي

$$k = \frac{F}{s} = \frac{5 \text{ Kg}}{0.25 \text{ m}} = 20 \text{ Kg} / \text{m}$$

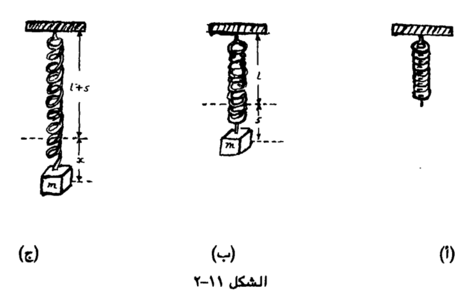


الشكل ١١-١

زنبرك معلق في أسفله كتلة

ولتكن لدينا كتلة وزنها w معلقة في الطرف السفلي للزنبرك ، ولنفترض أنها في وضع اتزان (الشكل ١١-٢ب) . وفي اللحظة التي تُترك فيها للكتلة w حرية

التحرك من وضع الاتزان (الشكل ١١-٢ج) فإن هذه الحركة تحددها معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية وذات شروط ابتدائية محددة .



(ج) (ب) (أ)

الشكل ١١-٢

ولاشتقاق هذه المعادلة التفاضلية يجب أن نأخذ في الحسبان القوى المؤثرة على الكتلة w وإتجاه كل من هذه القوى . و إصطلاحا سنعتبر القوة موجبة إذا كان إتجاهها إلى أسفل وسالبة إذا كان إتجاهها إلى أعلى . أما هذه القوى فهي :

١ - قوة الجاذبية F_1 وهي نفسها w وتساوي

$$F_1 = w = m g \qquad (2)$$

حيث m وزن الكتلة و g تسارع الجاذبية .

٢ - القوة المرجعة F_2 وهي القوة الناتجة عن الزنبرك نفسه والتي تتناسب مع مقدار ازاحة الزنبرك . ولو رجعنا إلى الشكل (ج) لرأينا أن الزنبرك قد تمدد بمقدار $s+x$ عن طوله الطبيعي l . وبذلك يكون مقدار F_2 مساويا $k\,(x+l)$ حيث k هو ثابت الزنبرك الذي أشرنا إليه سابقا . وحيث أن إتجاه هذه القوة إلى أعلى لأنها نابعة عن نفس الزنبرك ، لذلك فهي سالبة ، أي أن

$$F_2 = -\,k\,(x+s) \qquad (3)$$

ويجدر بنا أن نشير هنا إلى إنه عندما تكون $x = 0$ ، فإن النظام في وضع اتزان. ومن ثم تكون قوة الجاذبية F_1 والقوة الناتجة عن الزنبرك متساويتين ، أي أن

$mg = ks$. وبالتعويض في (3) نحصل على

$$F_2 = -kx - mg = -(kx + mg) \qquad (4)$$

٣ - قوة التخامد أو القوة المثبطة F_3 وهي قوة احتكاكية أو مثبطة تؤثر في الكتلة. فمثلا تعمل مقاومة الهواء كقوة تخامد أحيانا . وعموما فإننا نفترض أن قوة التخامد تتناسب مع سرعة الكتلة ، لكنها تعاكسها في الإتجاه . أي أن

$$F_3 = -b\,\frac{dx}{dt}, \quad b > 0 \qquad (5)$$

حيث b ثابت التخامد ووحدته كتلة / زمن .

٤ - القوى الخارجية ، وقد تكون موجبة أو سالبة حسب إتجاه تأثيرها (ومثال ذلك قوة حقل مغناطيسي يؤثر على كتلة صلبة معلقة بطرف الزنبرك) وسنرمز لحصيلة هذه القوى بالرمز F_4 أو F ، وسنفترض أنها تابعة للمتغير t فقط فهي دالة تتغير بتغير الزمن .

وبالتالي تكون مجموع القوى المؤثرة على الكتلة w مساوية للقوة الكلية المؤثرة على الكتلة ، أي أن

$$\tilde{F}\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

$$= mg - (kx + mg) - b\,\frac{dx}{dt} + F(t)$$

$$= -kx - b\,\frac{dx}{dt} + F(t)$$

وبتطبيق قانون نيوتن الثاني تنتج لدينا معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية هي

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\,\frac{dx}{dt} + F(t)$$

والتي يمكن إعادة كتابتها على النحو

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + b\,\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \qquad (6)$$

ولكي تكتمل الصياغة اللازمة لمسالة الاهتزازات فلا بد من إضافة الشرطين الابتدائيين التاليين

$$x(0) = x_0 \;,\; x'(0) = v_0 \qquad (7)$$

حيث الشرط الأول يمثل مقدار ازاحة الكتلة عن وضع الاتزان عند اللحظة $t = 0$ ويساوي x_0 . أما الشرط الثاني فيمثل السرعة الابتدائية للكتلة عند اللحظة $t = 0$ وتساوي v_0 .

وفي البندين التاليين سنتناول حالات خاصة من المعادلة (6) .

١١-٣ الاهتزازات غير المتخامدة

عندما تساوي b الصفر في المعادلة (6) أعلاه يزول تأثير قوة التخامد وتصبح المعادلة ممثلة لاهتزازات غير متخامدة تأخذ الشكل

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = F(t) \qquad (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة . وبالقسمة على m يصبح لدينا

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta^2 x = \frac{F(t)}{m} \qquad (2)$$

حيث $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$. أما الدالة المكملة للمعادلة (2) فهي

$$x_c = c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t$$

وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة (2) على النحو

$$x = c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t + x_p$$

حيث x_p الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة بينما $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

و أما إذا كانت $F(t) = 0$ ، فإن المعادلة (2)تصبح على النحو

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta^2 x = 0$$

وهي تمثل ما يُسمى بالاهتزازات الحرة غير المتخامدة .

مثال ١ . لنفترض أن كتلة وزنها 4.9 كجم شدت زنبركا إلى أسفل لمسافة 10 سم بعد وصولها إلى وضع الاتزان ، ثم قمنا بشد الكتلة إلى أسفل لمسافة 20 سم تحت نقطة الاتزان ، وأعطيت الكتلة سرعة ابتدائية مقدارها $(1/\sqrt{2})$ متر/ ثانية بإتجاه الأرض . بافتراض أننا تجاهلنا قوى التخامد والقوى الخارجية الأخرى التي قد تكون موجودة ، أوجد المعادلة التفاضلية التي تمثل حركة الكتلة .

الحل : حيث أن الحالة التي بين أيدينا حالة اهتزازات حرة غير متخامدة ، فإن المعادلة (3) هي التي تمثل نظام الحركة في هذا المثال . ومن ثم يكون الحل على الصيغة

$$x(t) = c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t \qquad (4)$$

ويتوجب علينا أولا أن نجد قيمة β . بإستعمال قانون هوك يكون لدينا

$$4.9 = mg = k\,(0.1)$$

أو

$$k = 49 \text{ Kg/meter}$$

وحيث أن $g = 9.8 \text{ meters / sec}^2$ ، فإن

$$m = \frac{4.9}{9.8} = 0.5 \text{ Kg} \left(\frac{\text{sec}^2}{\text{meter}}\right)$$

وبالتالي فإن

$$\beta = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{49}{0.5}}$$
$$= \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

وبالتعويض في (4) نجد أن

$$x(t) = c_1 \cos (7\sqrt{2}\, t) + c_2 \sin (7\sqrt{2}\, t)$$

الآن نستعمل الشروط الابتدائية لإيجاد قيمتي الثابتين c_1, c_2 :

$$0.20 = x(0) = c_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = x'(0) = 7\sqrt{2}\; c_2$$

وبالتالي $c_2 = \frac{1}{14}$ ، $c_1 = \frac{1}{5}$ ويصبح الشكل النهائي للدالّة x على النحو .

$$x(t) = \frac{1}{5}\cos(7\sqrt{2}\,t) + \frac{1}{14}\sin(7\sqrt{2}\,t) \qquad (5)$$

لاحظ أنه بإمكاننا إعادة كتابة (5) على النحو

$$x(t) = A\sin\left(7\sqrt{2}\,t + \phi\right) \qquad (6)$$

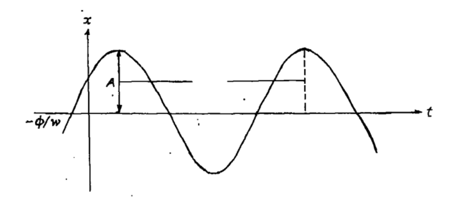
حيث

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{\frac{212}{70}}$$

بينما

$$\tan\phi = \frac{c_1}{c_2} = \frac{14}{5} = 2.8$$

ويتضح من (6) أن نظام الاهتزازات الحرة غير المتخامدة يمثلها منحنى دالّة الجيب أو ما يسمى بالحركة التوافقية البسيطة . ويمثل المقدار A سعة ذبذبة الحركة بينما تمثل ϕ زاوية المرحلة . وهذه الحركة دورية سعة كل دورة فيها $2\pi/\beta$ بينما عدد ذبذباتها $\beta/2\pi$ (انظر الشكل ١١-٣) .



الشكل ١١- ٣

منحنى الاهتزازات الحرة غير المتخامدة

مثال ٢ (الاهتزازات القسرية) . لنفترض أن $F(t) = F_0 \sin wt$ في المعادلة (2) وأن $A = \dfrac{c}{m}$. عندها يمكن إعادة كتابة (2) على النحو

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta^2 x = F_0 \sin wt \qquad (7)$$

مع إضافة الشرطين الابتدائيين

$$x(0) = x_0 \ , \quad x'(0) = v_0$$

هذا ويُطلق على هذا النظام " الاهتزازات القسرية غير المتخامدة " في حالة كون $\beta \neq w$. أما الحل الخاص للمعادلة (7) فيأخذ الشكل العام

$$x_p = C \sin wt$$

ويمكن إيجاد C بالتعويض المباشر في (7) حيث

$$-C w^2 \sin wt + \beta^2 C \sin wt = F_0 \sin wt$$

وبالتالي فلا بد أن نحصل على

$$C = \frac{F_0}{\beta^2 - w^2}$$

ومن ثم فالحل العام للمعادلة (7) هو

$$x(t) = c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t + \frac{F_0}{\beta^2 - w^2} \sin wt$$

ومنه

$$x'(t) = c_1 \beta \cos \beta t - c_2 \beta \sin \beta t + \frac{F_0 w}{\beta^2 - w^2} \cos \beta t$$

وباستعمال الشرطين الابتدائيين نجد أن قيمتي الثابتين هما

$$c_1 = \frac{v_0}{\beta} - \frac{F_0 w}{\beta \left(\beta^2 - w^2\right)} \ , \quad c_2 = x_0$$

ومن ثم فإن الحل النهائي العام للمعادلة (7) هو

$$x(t) = \frac{v_0}{\beta} \sin \beta t + x_0 \cos \beta t - \frac{F_0 w}{\beta \left(\beta^2 - w^2\right)} \sin \beta t + \frac{F_0}{\beta^2 - w^2} \sin wt$$

١١-٤ الرنين resonance

مرة أخرى نعود إلى المعادلة (6) من البند ١١-٢

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \qquad (1)$$

وبافتراض أن $b = 0$ ، وأن القوة الخارجية $F(t)$ معطاة بالدالة الدورية $C \cos wt$ حيث C مقدار ثابت ، فإن المعادلة (1) تأخذ الوضع

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = C \cos wt$$

وبالقسمة على m يصبح لدينا

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = \frac{C}{m} \cos wt$$

وحيث أن $\frac{k}{m} > 0$ ، فيمكننا إعادة كتابة المعادلة الأخيرة على النحو

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta^2 x = F_0 \cos wt$$

حيث

$$\beta = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad F_0 = \frac{C}{m}$$

وللحصول على معادلة الرنين لا بد أن يتوفر لدينا الشرط الهام التالي

$$\beta = w$$

وبذلك نحصل على المعادلة التفاضلية الممثلة لحركة الرنين

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2 x = F_0 \cos wt \qquad (2)$$

ولهذه المعادلة التفاضلية الدالة المكملة

$$x_c = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt$$

أما الحل الخاص x_p فيمكن إيجاده بإستخدام طريقة المعاملات غير المعينة ، فنكتب أولا الصيغة العامة للحل الخاص

$$x_p = At \sin wt + Bt \cos wt \qquad (3)$$

حيث A, B ثابتان يتعين إيجادهما . ثم بالتعويض المباشر من (3) في (2) نحصل على

$$2Aw \cos wt - 2Bw \sin wt = F_0 \cos wt$$

وهذا يعني أن

$$B = 0 , \ A = \frac{F_0}{2w}$$

ومن ثم فإن

$$x_p = \frac{F_0}{2w} t \sin wt$$

إذا الحل العام للمعادلة (2) هو

$$x = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt + \frac{F_0}{2w} t \sin wt \qquad (4)$$

وبتطبيق الشرطين الابتدائيين $x(0) = x_0 , \ x'(0) = v_0$ نجد أن

$$c_1 = x_0 \quad , \quad c_2 = \frac{v_0}{w}$$

وبالتالي نحصل على الحل العام في صورته النهائية

$$x(t) = x_0 \cos wt + \frac{v_0}{w} \sin wt + \frac{F_0}{2w} t \sin wt \qquad (4)$$

ملاحظة . فيما يلي مقارنة بين الوحدات المستخدمة في النظامين المتري والإنجليزي :

١ بوصة	٢,٥٣٨ سم
١ رطل	٠,٤٥٤ كجم
١ قدم	١٢ بوصة

تمارين

١ - إذا كان لدينا زنبرك يتمدد بمقدار بوصة ونصف بتأثير كتلة وزنها ٢ رطل . ولو رفعنا الكتلة إلى أعلى لمسافة ٣ بوصات فوق وضع الاتزان ، ثم تُركت . أوجد القانون الذي يصف الحركة . الجواب : $x(t) = -0.25\cos 16t$

٢ - في المسألة أعلاه ، لو سحبنا الكتلة إلى أسفل لمسافة ٤ بوصات تحت وضع الاتزان ثم أعطيت سرعة ابتدائية نحو الأسفل قدرها ٨ أقدام في الثانية . أوجد القانون الذي يصف الحركة . الجواب : $x(t) = \frac{1}{3}\cos 16t + \frac{1}{2}\sin 16t$

٣ - اثبت أنه يمكن كتابة جواب التمرين الثاني على النحو $x = 0.6\sin(16t + \phi)$ حيث $\phi = \tan^{-1}\frac{2}{3}$.

٤ - إذا كان لدينا زنبرك يتمدد بمقدار ٦ بوصات بتأثير كتلة وزنها ١٢ رطلا ، وإذا سُحبت الكتلة إلى الأسفل لمسافة ٣ بوصات تحت وضع الاتزان ثم تُركت وإذا كانت هناك قوة مسلطة قدرها $9\sin 4t$ رطل . أوجد القانون الذي يصف الحركة بإفتراض أن القوة المسلطة تؤثر نحو الأسفل إذا كانت قيم t صغيرة .

الجواب : $x(t) = \frac{1}{4}\cos 8t - \frac{1}{4}\sin 8t + \frac{1}{2}\sin 4t$

٥ - اثبت أنه يمكن إعادة كتابة جواب التمرين السابق على النحو

$$x(t) = \frac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(8t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\sin 4t$$

٦ - يتمدد زنبرك بمقدار بوصة ونصف البوصة تحت تأثير كتلة وزنها ١٦ رطلا . لو سُحبت الكتلة إلى الأسفل لمسافة ٤ بوصات تحت وضع الاتزان ، وأعطيت سرعة ابتدائية نحو الأسفل قدرها ٤ اقدام / ثانية ، ثم تم تسليط قوة خارجية قدرها $360\cos 4t$ رطلا . أوجد قيمة v, x للكتلة في اللحظة $t = \pi/8$ ثانية .

الجواب : $x = (-8/3)\ \text{ft}\ ,\ \ v = -8\ (\text{ft/sec})$

٧ - تؤثر كتلة وزنها ٢٠ رطلا على زنبرك فيتمدد مسافة ١٠ بوصات . إفترض أولا أنه تم ضغط الزنبرك بقدر ٤ بوصات ، ثم تم تعليق الكتلة المذكورة في الزنبرك وأعطي سرعة ابتدائية نحو الأسفل قدرها ٨ أقدام في الثانية . أوجد إلى أي حـــد

ستسقط الكتلة نحو الأسفل . الجواب : ٣٥ بوصة .

٨ - تؤثر كتلة قدرها ٤ أرطال على زنبرك فيتمدد مسافة بوصة ونصف . لو أن الكتلة سُحبت إلى الأسفل مسافة ٣ بوصات تحت وضع الاتزان ثم تُركت . ولو كانت هناك قوة مسلطة قدرها $8 \sin 16t$ تؤثر على الزنبرك . أوجد القانون الذي يصف الحركة . الجواب : $x(t) = \frac{1}{4}(1-8t)\cos 16t + \frac{1}{8}\sin 16t$

١١-٥ الاهتزازات المتخامدة damped vibrations

في البند السابق افترضنا أن حركة الجسم تكاد تتم في وضع مثالي ، حيث لا تاثير إطلاقا للقوى الخارجية أو الاحتكاكية . فكانت النتيجة حركة توافقية بسيطة ، ولكن الواقع أنه في معظم التطبيقات العملية لا بد من وجود قوة احتكاكية أو قوة متخامدة تلعب دورا هاما في تحديد حركة النظام .

ولنعد هنا كتابة المعادلة (6) من البند ١١-٢ الشاملة لكل الاحتمالات المختلفة

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \qquad (1)$$

وبالطبع فالمعادلة المساعدة للمعادلة (1) هي

$$m r^2 + br + k = 0, \quad b \neq 0$$

أما جذرا المعادلة فهما

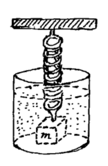
$$-\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4mk}$$

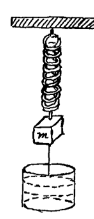
وكما نعلم من الباب السادس فإن صيغة حل المعادلة (6) تعتمد على طبيعة هذين الجذرين وبالأخص فهي تعتمد على المميز $b^2 - 4mk$. وفيما يلي سندرس كلا من الاحتمالات الممكنة للمميز وتحديد نوع الحركة الناتجة على ضوء كل احتمال .

وبما أن الحل المتمم للمعادلة (6) لا يرتبط إطلاقا بالدالة $F(t)$ ، فإننا سنفترض أن $F(t)$ تساوي الصفر . ولهذا فإننا سندرس ثلاث حالات محتملة للمعادلة التالية .

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0 \qquad (2)$$

إعتمادا على قيمة المميز b^2-4mk . وبصفة عامة فإن الاهتزازات الناتجة من المعادلة (2) يطلق عليها مسمى " الاهتزازات الحرة المتخامدة " (الشكل ١١-٤) .





الشكل ١١- ٤

الاهتزازات الموهنة

الحالة الأولى (الاهتزازات المخمدة) overdamped vibrations :

عندما يكون المميز موجبا ، أي $b^2-4mk>0$ ، وهنا نحصل على جذرين حقيقيين مختلفين هما

$$r_1=-\frac{b}{2m}+\frac{1}{2m}\sqrt{b^2-4mk}\ ,\quad r_2=-\frac{b}{2m}-\frac{1}{2m}\sqrt{b^2-4mk}$$

وبالتالي فالحل العام للمعادلة (2) يكون على النحو

$$x(t)=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t} \qquad (3)$$

وبالطبع فإن r_2 سالبة ، وكذلك r_1 لأن $b^2>b^2-4mk$ أو $b>\sqrt{b^2-4mk}$. ومن ثم فإن الدالة $x(t)$ تقترب من الصفر كلما تزايدت t إلى ما لانهاية . وباسلوب علمي رياضي نقول إن الحركة تتجه نحو الخمود والسكون مع مرور الوقت .

الحالة الثانية (الحركة المتخامدة تخامدا حرجا) critically damped :

عندما يساوي المميز الصفر ، وهنا نحصل على الجذر المكرر

$$r = -\frac{b}{2m}$$

وعليه يكون الحل العام للمعادلة (2) على النحو

$$x(t) = (c_1 + c_2\, t)\, e^{rt} \qquad (4)$$

وهذه الحركة تتجه أيضا إلى الخمود بمرور الوقت ، ويمكن إثبات ذلك باستعمال قاعدة لوبيتال L'hospital's rule حيث أن

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{c_1 + c_2 t}{e^{bt/2m}} = \lim_{t\to\infty} \frac{c_2}{\frac{b}{2m} e^{bt/2m}} = 0$$

الحالة الثالثة (الحركة المتخامدة) damped motion :

عندما يكون المميز سالبا . وهنا نحصل على الجذرين المركبين $\alpha \pm i\beta$ حيث

$$\alpha = -\frac{b}{2m}\ , \quad \beta = \sqrt{\frac{b^2 - 4mk}{2m}}$$

وبالتالي فالحل العام للمعادلة (2) هو

$$x(t) = e^{\alpha t}\left(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t\right) \qquad (5)$$

وكما فعلنا مع المعادلة (5) في البند ١١-٣ يمكننا إعادة كتابة المعادلة (5) على النحو

$$x(t) = A\, e^{\alpha t} \sin(\beta t + \phi) \qquad (6)$$

حيث $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ بينما $\tan \phi = \frac{c_1}{c_2}$.

وفيما يلي نتناول مثالا يشمل هذه الحالات الثلاث حيث تعتمد كل حالة على قيمة الثابت b في المعادلة العامة (2) .

مثال ١. لنفترض أن حركة نظام مكون من كتلة وزنبرك تحكمها المعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\,\frac{dx}{dt} + 25x = 0;\;\; x(0) = 1,\; x'(0) = 0 \qquad (7)$$

أوجد معادلة الحركة وارسم منحناها إذا كانت b تساوي كلا من القيم 8, 10, 12 على التوالي .

الحل : المعادلة المساعدة للمعادلة (7) هي

$$r^2 + br + 25 = 0$$

ولها جذران هما

$$r = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 100}$$

الحالة الأولى : عندما $b = 8$ يكون لدينا الجذران

$$r_1 = -4 + 3i \;\;,\;\; r_2 = -4 - 3i$$

وهي ممثلة لاهتزازات متخامدة تُعطى معادلة حركتها بالمعادلة التفاضلية

$$x(t) = c_1\, e^{-4t} \cos 3t \; + c_2\, e^{-4t} \sin 3t \qquad (8)$$

وباستعمال الشرطين الابتدائيين نجد أن

$$c_1 = 1 \;\;,\;\; c_2 = \frac{4}{3}$$

وبالتعويض في (8) نحصل على

$$x(t) = e^{-4t}\left(\cos 3t \; + \frac{4}{3}\sin 3t\right) \qquad (9)$$

أما إذا أردنا إعادة كتابة (9) على نحو مماثل للصيغة (5) نجد أن

$$x(0) = \frac{5}{3}\, e^{-4t}\;\; \sin\,(3t\; + \phi)$$

حيث

$$\phi = \tan^{-1}\frac{3}{4}$$

الحالة الثانية : عندما $b = 10$. عندها نحصل على الجذر الوحيد المكرر $r = -5$. وهي حالة حركة متخامدة تخامدا حرجا . وأما معادلة الحركة فهي

$$x(t) = (c_1 + c_2\, t)\, e^{-5t}$$

وبالتعويض في الشرطين الابتدائيين ننتهي إلى

$$x(t) = (1 + 5t)\, e^{-5t} \qquad (13)$$

الحالة الثالثة : عندما $b = 12$. عندها يكون للمعادلة جذران هما $-6 \pm \sqrt{11}$، وهي حالة اهتزازات مخمدة ، ومعادلة حركتها معطاة بالمعادلة التفاضلية

$$x(t) = c_1\, e^{(-6+\sqrt{11})t} + c_2\, e^{-(6+\sqrt{11})t} \qquad (14)$$

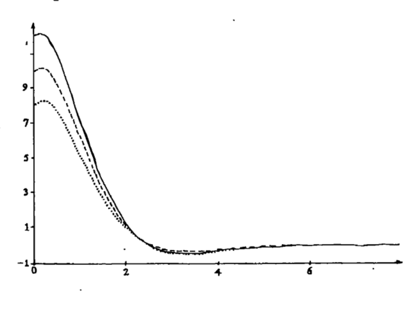
وباستعمال الشرطين الابتدائيين نجد أن

$$c_1 = \frac{11 + 6\sqrt{11}}{22}\ ,\ c_2 = \frac{11 - 6\sqrt{11}}{22}$$

وبالتالي تصبح (11) على النحو

$$x(t) = \frac{1}{22}\left\{\left(11 + 6\sqrt{11}\right)e^{(-6+\sqrt{11})t} + \left(11 - 6\sqrt{11}\right)e^{-(6+\sqrt{11})t}\right\}$$

ويوضح الشكل ١١-٥ المنحنيات الثلاثة الممثلة للحالات الثلاث في هذا المثال .



الشكل ١١-٥

منحنى الحركات الناتجة من القيم المختلفة لـ b

مثال ٢. لنفترض أن لدينا مجموعة مكونة من كتلة وزنبرك وأن هذه المجموعة تتحرك بموجب المعادلة التفاضلية

$$y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 12, \quad y'(0) = 4 \qquad (12)$$

أوجد معادلة الحركة وارسم منحناها بعد مرور فترات زمنية مختلفة .

الحل : المعادلة المساعدة للمعادلة (12) هي

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

والتي جذراها $r = -1 \pm i$. وبالتالي فإن معادلة الحركة تخضع للصيغة

$$y(t) = e^{-t} (c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

وباستعمال الشرطين الابتدائيين نجد أن

$$y(t) = 20e^{-t} \sin (t + \phi)$$

حيث $\phi = \tan^{-1}\frac{3}{4}$.

تمارين

١ - تؤثر كتلة وزنها رطلان على زنبرك فيتمدد لمسافة نصف قدم . لو أثرت على الزنبرك قوة مسلطة قدرها من الأرطال $\frac{\sin 8t}{4}$ وقوة تخامد أخرى موهنة قدرها $|v|$. ولو بدأت الكتلة بمسافة ربع قدم تحت وضع الاتزان وبسرعة ناقلة للأعلى قدرها 3 أقدام في الثانية . أوجد القانون الذي يحدد موضع الكتلة عند اللحظة t .

الجواب : $x(t) = \frac{3}{32} e^{-8t} (3 - 8t) - \frac{1}{23} \cos 8t$

٢ - تؤثر كتلة وزنها 4 أرطال على زنبرك فيتمدد لمسافة 0.32 قدم . عُلقت الكتلة في نهاية الزنبرك وتركت لتتحرك في محيط ينتج قوة تخامد قدرها $\frac{3|v|}{2}$. سُحبت الكتلة لمسافة نصف قدم تحت وضع الاتزان وأعطيت سرعة ابتدائية إلى أعلى قدرها 4 أقدام في الثانية . أوجد القانون الذي يصف الحركة .

الجواب : $x(t) = \frac{1}{8} e^{-6t} (4 \cos 8t - \sin 8t)$

٣ – تؤثر كتلة وزنها رطلان على زنبرك فيتمدد لمسافة 6 بوصات . لو كانت هناك قوة تخامد مقدارها مساو لمقدار السرعة (مع اختلاف الوحدات طبعا) . وكانت هناك قوة مسلطة قدرها $2 \sin 8t$ تؤثر على الزنبرك ، وعند اللحظة $t = 0$ تُركت الكتلة حرة من نقطة تقع مسافة 3 بوصات تحت وضع الاتزان . أوجد المسافة بمعلومية الزمن . الجواب : $x(t) = \left(\frac{1}{2} + 4t\right)e^{-8t} - \frac{1}{4} \cos 8t$

٤ – تؤثر كتلة وزنها رطلان على زنبرك فيتمدد مسافة 4 بوصات . لو بدأت الكتلة حركتها من عند وضع الاتزان وبسرعة قدرها 21 قدم في الثانية نحو الأسفل ، ولو كانت مقاومة الهواء تنتج قوة تخامد قدرها 2 في المائة من مقدار السرعة . أوجد القانون الذي يصف الحركة . الجواب : $x(t) = 1.22\, e^{0.16t} \sin 9.8t$

٥ – في التمرين السابق ، كم من الوقت يجب أن يمر حتى يصبح معامل التخامد عشر قيمته الابتدائية ؟ الجواب : ١٤,٤ ثانية

٦– بالنسبة للتمرين الرابع . أوجد موضع الكتلة عند (أ) الوقفة الأولى (ب) الوقفة الثانية . الجواب : (أ) ١ر٢ قدم (ب) ١ر١- قدم

٧ – تتحرك نقطة على طول المحور السيني طبقا للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6\,\frac{dx}{dt} + 25x = 0$$

لو بدأت النقطة الحركة عند النقطة $x = 0$ وبسرعة ابتدائية قدرها 21 قدم في الثانية في الإتجاه الأيسر . أوجد ما يلي :

(أ) قيمة x بمعلومية t .

(ب) اللحظات التي تقف خلالها النقطة .

(ج) النسبة بين القيم العددية للمسافة x عند الوقفات المتتابعة .

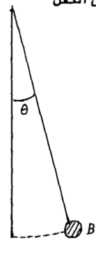
الجواب : (أ) $x(t) = -\,3e^{-3t} \sin 4t$

(ب) $t = 0.23 + \frac{n\pi}{4}\,, n = 0, 1, 2, \ldots$

(ج) 0.095

١١-٦ البندول البسيط simple pendulum

يتكون البندول البسيط من حبل طوله L معلق من طرفه العلوي بحيث يمكنه التأرجح بحرية في مستوى عمودي . ويُربط في الطرف السفلي للحبل ثقل وزنه w رطل . أما وزن الحبل فيُعتبر مهملا بالنسبة لوزن الثقل . ولنرمز بـ θ لزاوية الازاحة ، وهي تلك الزاوية التي يشكلها البندول مع المحور الرأسي (كما في الشكل ١١-٦) في اللحظة t. أما الجزء المماس من القوة فهو $w \sin \theta$ حيث القوة الأصلية هي w المساوية لوزن الثقل



الشكل ١١-٦

البندول البسيط

وبتجاهل وزن الحبل واستعمال القانون $s = A\theta$ كمقياس لطول القوس الذي يشكله البندول أثناء حركته مع الوضع الرأسي يمكننا أن نستنتج أن

$$\frac{w}{g}\,\frac{d^2 s}{dt^2} = -w \sin \theta \qquad (1)$$

لاحظ تماثل الوحدات في طرفي المعادلة (1) . وبما أن $s = A\theta$ حيث A مقدار ثابت ، فإن المعادلة (1) تصبح على النحو

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{A} \sin \theta = 0 \qquad (2)$$

أما حل المعادلة (2) فليس سهلا البتة حيث يتعلق الحل بإجراء تكامل إهليلجي elliptic integral . وعلى أي حال إذا كانت θ صغيرة فإن $\sin \theta = \theta$ تقريبا ، ومن ثم يمكن تقريب المعادلة (2) لتصبح على النحو المبسط

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta^2\theta = 0 \qquad (3)$$

حيث $\beta^2 = \frac{g}{A}$.

وهكذا تتحول المعادلة (2) إذا كانت θ صغيرة إلى المعادلة (3) المألوفة لدينا والتي عالجناها في البندين الثالث والرابع من هذا الباب . وربما كانت النتائج مفيدة طالما كانت θ مستوفية للشرط $|\theta| < 0.3$ radians .

تمارين

١ – لإحدى الساعات بندول طوله 6 بوصات . وتدق الساعة دقة واحدة في كل مرة يكمل فيها البندول دورة كاملة من التأرجح والعودة إلى وضعه الأصلي . كم مرة تدق الساعة خلال 30 ثانية ؟ الجواب : ٣٨ مرة

٢ – لدينا بندول طوله 6 بوصات مستقر في وضع السكون الذي يشكل زاوية قدرها عشر الدرجة الدائرية مع المحور الرأسي . أوجد قانون الحركة بعد اطلاق البندول من وضع السكون علما بأن الجاذبية الأرضية تساوي ٣٢ قدم / مربع الثانية .

الجواب : $\theta(t) = \frac{1}{10} \cos 8t$

٣ – بافتراض أن لدينا نفس البندول السابق في نفس وضع السكون المحدد . لو أطلق البندول بسرعة قدرها درجة دائرية واحدة في الثانية بإتجاه المحور الرأسي . أوجد قانون الحركة . الجواب : $\theta(t) = \frac{\cos 8t}{10} - \frac{\sin 8t}{8}$

٤ – بالنسبة للتمرين السابق ، أوجد – إلى أقرب درجة – الحد الأقصى لزاوية الازاحة من المحور الرأسي . الجواب : ٩ درجات

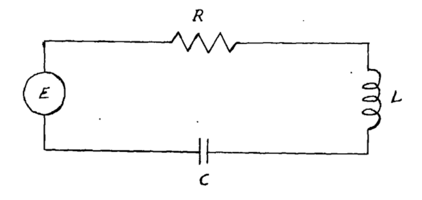
١١-٧ الدوائر الكهربائية البسيطة

في هذا البند نتناول تطبيقا آخر من تطبيقات المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذوات المعاملات الثابتة . وهذا التطبيق يشمل الدائرة الكهربائية البسيطة المكونة من فرق جهد مسلط – كالبطارية أو المولد – ذات الرمز E ومقاومة R والسعة C ، وأخيرا المحاثية L ، وهي الأداة التي تحدث التأثير المغناطيسي في الدائرة الكهربائية . وكل هذه المكونات متصلة على التسلسل لتشكل الدائرة المغلقة كما في الشكل ١١-٧ وللاختصار تُسمى هذه الدائرة دائرة RLC .

هذا ويحكم هذه الدائرة مبدآن هامان هما مبدأ حفظ الشحنة ومبدأ حفظ الطاقة . وقد قام العالم كيرشوف Kirchhoff بصياغة هذين المبدئين في القوانين التالية :

أولا : مقدار التيار الذي يمر في كل عنصر من عناصر الدائرة (L,C,R,E) ثابت لا يتغير .

ثانيا : فرق الجهد المسلط يساوي حاصل جمع فروق الجهد في بقية الدائرة .



الشكل ١١-٧

الدائرة الكهربائية البسيطة

ولتطبيق قوانين كيرشوف يجب أن نحيط علما بالقوانين التالية :

أ - فرق جهد المقاومة = شدة التيار مضروبا في المقاومة ، أو

$$E_R = I \, . \, R$$

ب - فرق جهد المحاثية = المحاثية مضروبا في معدل تغير شدة التيار بالنسبة للزمن، أو

$$E_L = L \, \frac{dI}{dt}$$

ج - فرق جهد المكثف = مقلوب السعة مضروبا في الشحنة الكلية ، أو

$$E_C = \frac{1}{C} \, g$$

وبمقتضى قانون كيرشوف الثاني (انظر ثانيا أعلاه) الذي ينص على مبدأ حفظ الطاقة ، فإن

$$E_L + E_R + E_C = E(t)$$

وبعد التعويض من المعادلات أعلاه نحصل على

$$L \, \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \, q = E(t) \qquad (1)$$

وبما أن التيار هو التغير الآني في الشحنة ، أي أن $I = \frac{dq}{dt}$ ، فإن بإمكاننا إعادة كتابة المعادلة (1) على الصورة

$$L \, \frac{d^2q}{dt^2} + R \, \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} \, q = E(t) \qquad (2)$$

وهي معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية .

وللحصول على صيغة بديلة يمكننا اشتقاق المعادلة (2) بالنسبة للزمن ، ومن ثم التعويض عن $\frac{dq}{dt}$ بالتيار I لنصل إلى

$$L \, \frac{d^2I}{dt^2} + R \, \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \, I = \frac{dE}{dt} \qquad (3)$$

هذا ويمكن أن نضيف للمعادلة (2) الشرطين الابتدائيين التاليين المفترض تحديدهما عند اللحظة $t = 0$. وهما

$$q(0) = q_0 \;\; , \quad q'(0) = I_0$$

وبالمثل يمكننا إضافة الشرطين الابتدائيين للمعادلة (3)

$$I(0) = I_0 \quad , \quad I'(0) = v_0$$

مثال ١. لدينا دائرة RLC فرق جهدها المسلط معطى بالمعادلة

$$E(t) = \sin 100t$$

ولها مقاومة قدرها 2 في المائة أوم ، ومحاثية قدرها واحد في الألف من الهنري ، وسعة قدرها 2 فاراد . إذا كان كل من التيار الابتدائي I_0 والشحنة الابتدائية يساوي صفرا . أوجد شدة التيار في الدائرة عندما تكون t أكبر من الصفر .

الحل : للتبسيط نسرد القيم المعطاة مرة أخرى

$$L = 0.001,\ R = 0.02,\ C = 2,\ E(t) = \sin 100t$$

وبالتعويض في (3) نحصل على

$$0.001\frac{d^2I}{dt^2} + 0.02\frac{dI}{dt} + 0.5\,I = 100 \cos 100t$$

أو

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 20\,\frac{dI}{dt} + 500\,I = 100{,}000 \cos 100t \qquad (4)$$

وللمعادلة المتجانسة ذات العلاقة معادلة مساعدة هي

$$r^2 + 20r + 500 = (r+10)^2 + (20)^2 = 0$$

والتي لها الجذران المركبان $-10 \pm 20\,i$ ، وبذلك يكون للمعادلة المتجانسة الحل

$$I_C(t) = e^{-10t}\left[c_1 \cos 20t + c_2 \sin 20t\right] \qquad (5)$$

ويمكن الآن استعمال طريقة المعاملات غير المعينة لإيجاد الحل الخاص I_p . فبافتراض أن

$$I_p(t) = A \cos 100t + B \sin 100t$$

نجد الاشتقاقين الأول والثاني ثم نعوض في المعادلة (4) لننتهي أخيرا إلى النتيجة

$$A = -\frac{.95}{9.425}\ ,\ B = \frac{20}{9.425}$$

وإذا فالحل العام للمعادلة (4) هو

$$I(t) = e^{-10t}\left(c_1 \cos 20t + c_2 \sin 20t\right) - \frac{95}{9.425}\cos 100t + \frac{20}{9.425}\sin 100t \qquad (6)$$

ولإيجاد قيمتي الثابتين c_1, c_2 ، فلا بد لنا من إيجاد قيمة $I(0)$ ، وكذلك قيمة $I'(0)$. أما $I(0)$ فإننا نعلم من المعطيات أنها تساوي صفرا . ولإيجاد $I'(0)$ نعوض عن قيم C, R, L في المعادلة (1) ونساوي بين الطرفين في اللحظة $t = 0$.
وبالتالي نحصل على

$$(0.001)\, I'(0) + (0.02)\, I(0) + (0.5)\, q(0) = \sin 0 = 0$$

وحيث أن $I(0) = q(0) = 0$ ، فلا بد أن تكون $I'(0) = 0$.

و أخيرا نستعمل المعادلة (6) وقيم $I(0)$ وكذلك $I'(0)$ لنصل إلى

$$I(0) = c_1 - \frac{95}{9.425} = 0$$

$$I'(0) = -10c_1 + 20c_2 + \frac{2000}{9.425} = 0$$

ومن ثم نجد أن

$$c_1 = \frac{95}{9.425}\ , \ c_2 = -\frac{105}{18.85}$$

وإذا فالتيار في هذه الدائرة الكهربائية تحدده المعادلة

$$I(t) = \frac{e^{-10t}}{9.425}\left(95 \cos 20t - \frac{105}{2}\sin 20t\right) - \frac{1}{9.425}\left(95 \cos 100t - 20 \sin 100t\right) \qquad (7)$$

تمارين

١ - دائرة RLC لها فرق مسلط يساوي 20 فولت ، ومقاوم قدره 100 أوم ، ومحاثية قدرها 4 هنري ، وسعة المكثف قدرها واحد في المائة من الفاراد . إذا كان التيار الابتدائي يساوي صفرا بينما الشحنة الابتدائية على المكثف تساوي 4 كولمبس . أوجد المعادلة التي تصف شدة التيار بالنسبة للزمن t .

الجواب : $I(t) = \frac{19}{\sqrt{21}}\, e^{-12.5t}\left[e^{2.5\sqrt{21}\, t} - e^{-2.5\sqrt{21}\, t}\right]$

٢ - في التمرين السابق أوجد الحل الخاص فقط إذا كانت المعلومات التي لدينا على النحو التالي :

$$E = 10 \cos 20t \quad , \quad R = 120 \text{ ohms}$$
$$L = 4 \text{ henrys} \quad , \quad C = 0.001 \text{ farads}$$

الجواب : $I_p(t) = \frac{1}{51}\left(4 \cos 20t + \sin 20t\right)$

٣ - دائرة RLC لها محاثية قدرها 1 هنري ، مكثف سعته 10^{-4} فاراد ، وفرق جهد مسلط معطى بالمعادلة $E(t) = 100 \sin 50t$. أما القيمة الابتدائية لكل من الشحنة والتيار فتساوي صفرا .

(أ) أوجد المعادلة التي توجد مقدار الشحنة في أية لحظة .

(ب) أوجد معادلة التيار في أية لحظة .

(ج) أوجد الأوقات التي تصل فيها سعة المكثف إلى الصفر .

الباب الثاني عشر

تحويلات لابلاس

■ مقدمة ■ تعريف ووجود تحويل لابلاس ■ خواص تحويل لابلاس ■ تحويل لابلاس العكسي ■ حل مسألة القيمة الابتدائية ■ ملخص الباب ■ تمارين عامة .

١٢-١ مقدمة

يهدف هذا الباب إلى إعطاء نبذة عن إحدى التطبيقات الهامة لتحويلات لابلاس في مجال المعادلات التفاضلية الخطية . وحتى نكون أكثر دقة فإننا سنعنى هنا بدراسة طريقة حل المسألة الابتدائية لمعادلة تفاضلية خطية عن طريق استعمال تحويلات لابلاس .

وفي البنود الثلاثة التالية سنتناول تعريف هذه التحويلات وبعض أهم خصائصها المتعلقة بموضوع هذاالباب ، ذلك أن دراسة هذه الخصائص تساهم إلى حد كبير في عملية تبسيط وتقريب فكرة استخدام تحويلات لابلاس لحل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة . ومن هنا تأتي أهمية البنود الثلاثة التالية بما فيها من أمثلة كثيرة متعددة .

وكما يُستدل من الإسم أو الإصطلاح ، فإن تحويل لابلاس Laplace transform (المنسوب إلى عالم الرياضيات الشهير لابلاس ، ١٧٤٩-١٨٢٧م ، الفرنسي الجنسية) يعمل على التأثير على دالّة f فيكون الناتج دالّة أخرى شأنه في ذلك شأن مؤثرات أخرى كثيرة كالمؤثر التفاضلي مثلا أو تكامل f وما شابه ذلك .

١٢-٢ تعريف ووجود تحويل لابلاس

تعريف ١. لتكن f دالّة معرفة لجميع قيم t غير السالبة . ولتكن F دالّة معرفة على النحو التالي :

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \qquad (1)$$

حيث مجال F يتكون من جميع قيم s التي تجعل التكامل في (1) موجودا . ويطلق على الدالّة F تحويل لابلاس للدالّة f . وللإختصار نشير لهذا التحويل بالرمز $L\{f(t)\}$.

ملاحظة . لاحظ أن التكامل في (1) من التكاملات المعتلة . فهو أصلا عبارة عن النهاية

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{N} e^{-st}\ f(t)\, dt = \int_0^{\infty} e^{-st}\ f(t)\, dt = L\{f(t)\} \qquad (2)$$

طالما وُجدت هذه النهاية .

مثال ١. أوجد تحويل لابلاس للدالّة $f(t) = 1$ لجميع قيم t غير السالبة .

الحل : بتطبيق التعريف ١

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} .1\, dt = \lim_{N\to\infty} \int_0^{N} e^{-st}\, dt$$

$$= \lim_{N\to\infty} -\frac{e^{-st}}{s} \Big]_{t=0}^{N} = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-sN}}{s}\right) = \frac{1}{s}$$

لجميع قيم s الموجبة . أما إذا كانت s سالبة فمن الواضح أن المقدار

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\ dt$$

لا يتقارب . إذا

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

لجميع قيم s الموجبة .

مثال ٢. أوجد تحويل لابلاس للدالة $\sin bt$ حيث b ثابت يختلف عن الصفر .

الحل : بالاستعانة بأحد كتب التفاضل والتكامل نجد قيمة التكامل اللامحدود

$$\int e^{ax} \sin mx \, dx = \frac{e^{ax}(a \sin mx - m \cos mx)}{a^2+m^2} + c$$

وطبقا للتعريف فإن

$$L\{\sin bt\} = \int_0^\infty e^{-st} \sin bt \, dt$$

وبالتالي فإن

$$L\{\sin bt\} = \left[\frac{e^{-st}(-s \sin bt - b \cos bt)}{s^2+b^2}\right]_{t=0}^{\infty} \qquad (3)$$

وعندما تكون s موجبة ، فإن e^{-st} تؤول إلى الصفر عندما تؤول t إلى ما لانهاية . أما $\sin bt$ وكذلك $\cos bt$ ، فلا تتجاوز قيمتها المطلقة الواحد . وبالتالي نحصل من (3) على

$$L\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}, \quad s > 0 \qquad (4)$$

و بطريقة مماثلة نجد أن

$$L\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2}, \quad s > 0$$

مثال ٣. أوجد تحويل لابلاس للدالّة f غير المتصلة والمعرفة على النحو

$$f(t)=\begin{cases} 2, & 0<t<5 \\ 0, & 5<t<10 \\ e^{4t} & 10<t \end{cases}$$

الحل : طبقا لتعريف f الموضح أعلاه ، فإننا نجد قيمة التكامل في (1) عن طريق تقسيمه إلى ثلاثة أجزاء مختلفة على النحو

$$L\{f(t)\}=\int_0^5 e^{-st}\ 2\,dt+\int_5^{10} e^{-st}\,.0\,dt\ +\ \int_{10}^{\infty} e^{-st}.e^{4t}\,dt$$

$$=2\int_0^5 e^{-st}\ 2\,dt+\int_{10}^{\infty} e^{-(s-4)t}\,dt$$

$$=-\frac{2}{5}\left[e^{-st}\right]_{t=0}^{5}-\frac{1}{s-4}\left[e^{-(s-4)t}\right]_{t=10}^{\infty}$$

$$=\frac{2}{5}-2\,\frac{e^{-5s}}{s}+\frac{e^{-10(s-4)}}{s-4},\quad s>4$$

ولتحويلات لابلاس خاصية هامة نلخصها في النظرية التالية التي يعتمد برهانها على الخاصية الخطية للتكامل ، ولذا فالبرهان سهل ومتروك للقارئ .

نظرية ١ . إذا وُجد تحويل لابلاس لكل من الدالتين f_1, f_2 لجميع قيم s الأكبر من α ، وكان c ثابتا ، فإن

$$L\{f_1+f_2\}=L\{f_1\}+L\{f_2\} \qquad (5)$$

وكذلك

$$L\{cf_1\}=c\,L\{f_1\} \qquad (6)$$

مثال ٤ . أوجد $L\left\{5-3\,e^{2t}+7\sin 3t\right\}$.

الحل : باستعمال النظرية ١ نجد أن

$$I=L\left\{5-3e^{2t}+7\sin\ 3t\right\}=\ 5L\{1\}-3L\left\{e^{2t}\right\}+7L\{\sin 3t\}$$

باستعمال المثالين ١ ,٢ يمكننا إيجاد قيمتي الحدين الأول والثالث في الطرف الأيمن. ولإيجاد قيمة الحد الأوسط نجد أولا قيمة $L\left\{e^{2t}\right\}$ من التعريف

$$L\left\{e^{2t}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{2t}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-2)t}\, dt$$

$$= -\frac{1}{s-2}\left[e^{-(s-2)t}\right]_{t=0}^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{s-2}[0-1] = \frac{1}{s-2}\ ;\ s > 2$$

وعموما فإن

$$L\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a}\ ,\ s > a$$

ومن ثم نجد أن

$$I = 5\,\frac{1}{s} - 3\,\frac{1}{s-2} + \frac{21}{s^2+9}$$

مثال ٥. أوجد $L\left\{\sin^2 t\right\}$.

الحل : باستعمال المتطابقة المثلثية المعروفة $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$ والرجوع إلى مثالي ١ ، ٢ نجد أن

$$L\left\{\sin^2 t\right\} = L\left\{\frac{1-\cos 2t}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}L\{1\} - \frac{1}{2}L\{\cos 2t\}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\,\frac{s}{s^2+4}$$

$$= \frac{2}{s\left(s^2+4\right)}$$

أما السؤال التالي الذي قد يتبادر إلى الأذهان فهو عن وجود تحويلات لابلاس؛ ذلك أن هناك كثيرا من الدوال التي تقع خارج مجال تحويلات لابلاس ، فمثلا لا يوجد $L\left\{t^{-1}\right\}$ كما لا يوجد $L\left\{e^{t^2}\right\}$.

وفيما يلي نسطر شروطا كافية للدالّة f تضمن وجود $\dot{L}\{f\}$ ، ولكن يجب أن يسبق ذلك التعريفات الثلاثة التالية :

تعريف ٢ (نقطة الانفصال القفزية jump discontinuity)

لتكن f دالّة معرفة على الفترة (a, b) . يقال للنقطة t_0 في (a, b) أنها نقطة إنفصال قفزية للدالّة f إذا كانت f غير متصلة عند النقطة t_0 ، وكانت النهايتان

$$\lim_{t\to t_0^+} f(t) \quad , \quad \lim_{t\to t_0^-} f(t)$$

موجودتين كأعداد حقيقية محدودة .

وبناءً على هذا التعريف يمكننا الآن أن نعرف ما يُسمى بالإتصال القطعي piecewise continuity .

تعريف ٣ (الإتصال القطعي) . يُقال للدالّة f إنها متصلة قطعيا على الفترة المحدودة $[a, b]$ إذا كانت f متصلة عند جميع نقاط $[a , b]$ باستثناء عدد محدود من هذه النقاط التي يحتمل أن تمثل نقاط إنفصال قفزية للدالّة f .

تعريف ٤ (الرتبة الأسية α exponential order) .

يقال أن الدالّة f من الرتبة الأسية α إذا وُجد ثابتان موجبان M , T بحيث

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t} \qquad (7)$$

لجميع قيم t المساوية أو الأكبر من T .

نظرية ٢ (شروط وجود تحويلات لابلاس) . إذا كانت f دالّة متصلة قطعيا على الفترة $[0, \infty)$ ومن الرتبة الأسية α ، عندها يوجد $L\{f(t)\}(s)$ لجميع قيم s الأكبر من α .

البرهان :

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$
$$= \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$
$$= I_1 + I_2$$

لا حظ أن وجود I_1 ناتج عن حقيقة أن I_1 يمكن كتابته كمجموع لعدد محدود من تكاملات f على فترات تكون f متصلة عليها . أما وجود I_2 فيمكن إستنتاجه بإستعمال (7)

$$|I_2| \le \int_T^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| dt$$

$$\le M \int_T^\infty e^{-st} e^{\alpha t}\, dt = \frac{M e^{-(s-\alpha)T}}{s - \alpha} < \infty$$

لجميع قيم s الأكبر من α .

ملاحظة . معطيات النظرية ٢ كافية وليست ضرورية ، فالدالة $f(t) = t^{-1/2}$ ليست متصلة قطعيا ، ولكن

$$L\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^{-1/2}\, dt = 2s^{-1/2} \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi / s}\,, \; s > 0$$

ونختم هذا البند بذكر تحويلات لابلاس لبعض من الدوالّ المعروفة .

الدالة f	$L\{f\}$
1	$1/s\,,\ s>0$
$t^n e^{at}\ ;\ n=0, 1, \ldots$	$n!/(s-a)^{n+1}\,,\ s>a$
$t^n\ ;\ n=1, 2, \ldots$	$n!/s^{n+1}\,,\ s>0$
$\sin bt$	$b/(s^2+b^2)\,,\ s>0$
$\cos bt$	$s/(s^2+b^2)\,,\ s>0$

جدول ١٢-١

بعض تحويلات لابلاس

تمارين

استخدم تعريف ١ لإيجاد تحويل لابلاس لكل من الدوالّ التالية :

(1) e^{6t} (2) $\cos 2t$ (3) $e^{-t}\sin 2t$

(4) e^{-2t-5} (5) $t\cos t$ (6) te^{4t}

(7) $f(t)=\begin{cases}0, & 0<t<2\\ t, & 2<t\end{cases}$

(8) $f(t)=\begin{cases}t, & 0<t<1\\ t, & 1\le t\end{cases}$

(9) $f(t)=\begin{cases}e^{2t}, & 0<t<3\\ 1, & 3<t\end{cases}$

استخدم جدول ١٢-١ والخاصية الخطية لإيجاد التحويلات التالية :

(10) $L\left\{5-e^{2t}+6t^2\right\}$

(11) $L\left\{t^2-3t-2e^{-t}\sin 3t\right\}$

(12) $L\left\{e^{3t}\sin 6t - t^3 + e^t\right\}$

(13) $L\left\{e^{-2t}\cos\sqrt{3}\,t - t^2e^{-2t}\right\}$

(14) $L\left\{t^2 + 6t - 3\right\}$

(15) $L\left\{4t^2 - 5\sin 3t\right\}$

(16) $L\left\{\sin 2t\,\cos 2t\right\}$

(17) $L\left\{1 + e^{4t}\right\}$

أي من الدوالّ التالية متصل ، وأيها متصل قطعيا ، وأيها لا ينتمي لأي من الفئتين :

(18) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2 \\ t^2, & 2 \le t \end{cases}$

(19) $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ t-1 & 1 < t < 3 \\ t^2 - 4 & 3 < t \le 10 \end{cases}$

(20) $g(t) = \begin{cases} 1/t, & 0 \le t < 1 \\ 1 & 1 \le t \le 2 \\ 1-t & 2 < t \le 10 \end{cases}$

(21) $h(t) = \dfrac{t^2 - t - 20}{t^2 + 7t + 10}$

(22) $f(t) = \dfrac{t}{t^2 - 1}$

(23) $g(t) = \begin{cases} t^{-1}\sin t, & t \ne 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$

أي من الدوالّ التالية من الرتبة الأسية :

(24) $50\ e^{19t}$ (25) $\left(t^2 + 1\right)^{-1}$ (26) $\sin t^2 + t^3 e^{5t}$

(27) $3 - e^{t^2} + 2\cos 4t$ (28) $t\ \ln t$ (29) e^{t^3}

١٢-٣ خواص تحويل لابلاس

في البند السابق رأينا أن إيجاد تعبير صريح للمقدار $L\{f\}$ يتطلب منا حساب التكامل المعتل في (1) ، والذى قد لا يكون أمرا متيسرا في جميع الأحوال . وقد رأينا أيضا أن الخاصية الخطية لتحويلات لابلاس ساهمت إلى حد كبير من تخفيف هذا العبء .

وفي هذا البند سنناقش مزيدا من خواص تحويل لابلاس التي تحقق لنا هدفين هامين هما :

أولا : تبسيط عمليات حساب تحويلات لابلاس .

ثانيا : المساهمة في إيجاد حلول المسائل الابتدائية بواسطة تحويلات لابلاس .

خاصية الازاحة

نظرية ١. إذا وُجد تحويل لابلاس

$$L\{f\}(s) = F(s)$$

لجميع قيم s الأكبر من α ، فإن

$$L\left\{e^{at} f(t)\right\}(s) = F(s-a) \qquad (1)$$

لجميع قيم s الأكبر من $\alpha + a$.

البرهان : بتطبيق التعريف مباشرة

$$L\left\{e^{at} f(t)\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\, dt = F(s-a) .$$

وهكذا توضح لنا خاصية الازاحة التأثير الناتج على تحويل لابلاس والناشىء عن ضرب الدالة $f(t)$ بالدالة الأسية e^{at} .

مثال ١. باستعمال مثال ٢ في البند السابق وخاصية الازاحة نستنتج أن

$$L\left\{e^{at}\ \sin bt\right\}(s)=F(s-a)=\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

تحويل لابلاس للمشتقة

نظرية ٢. لتكن f دالّة متصلة على الفترة $[0,\infty)$. ولتكن f' متصلة قطعيا على نفس الفترة ، ولتكن كلاهما من الرتبة الأسية α . عندها نستنتج أن

$$L\{f'\}(s)=s\,L\{f\}(s)-f(0) \qquad (2)$$

لجميع قيم s الأكبر من α .

البرهان : نكامل بطريقة التجزئة وعن طريـــق استخدام التعويض $u=e^{-st}$ ، $dv=f'(t)\,dt$ لنحصل على

$$L\{f'\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt$$

$$=e^{-st}\ f(t)\ \Big|_0^\infty+s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

$$=s\,L\{f\}(s)-f(0)$$

مثال ٢. عن طريق استخدام العلاقة

$$L\{\sin bt\}(s)=\frac{b}{(s^2+b^2)}$$

أوجد $L\{\cos bt\}$.

الحل : إذا كانت $f(t)=\cos bt$ ، فإن $f(0)=1$, $f'(t)=-b\ \sin bt$. بتطبيق (2) نحصل على

$$L\{f'\}(s)\ =s\,L\{f\}(s)-f(0)$$

$$L\{-b\ \sin bt\}=s\,L\{\cos bt\}(s)-1$$

أو

$$(-b)\,\frac{b}{s^2+b^2} = s\,L\,\{\cos bt\}(s) - 1$$

وبالتالي نجد المطلوب

$$L\,\{\cos bt\}(s) = \frac{1}{s}\left[1 - \frac{b^2}{s^2+b^2}\right]$$

$$= \frac{s}{s^2+b^2}$$

ويمكن بسهولة أن تعمم نظرية ٢ إلى المشتقات العليا على النحو التالي :

تحويل لابلاس للمشتقات العليا

نظرية ٣ . لتكن $f^{(n-1)}, f^{(n-2)}, \ldots, f', f$ دوالّ متصلة على الفترة $[0,\infty)$، ولتكن $f^{(n)}$ متصلة قطعيا على نفس الفترة . ولتكن جميع هذه الدوالّ من الرتبة الأسية α . عندها نستنتج أن

$$L\,\{f^{(n)}\}(s) = s^n\,L\{f\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

مشتقة تحويل لابلاس

نظرية ٤ . لتكن $F(s) = L\,\{f\}(s)$ ، ولنفترض أن f متصلة قطعيا على الفترة $[0,\infty)$ ومن الرتبة الأسية α . عندها نستنتج أنه لجميع قيم s الأكبر من α

$$F'(s) = -\,L\,\{t\,f(t)\}(s) \qquad (3)$$

ولن نتعرض هنا للبرهان ، وإنما سنذكر نص نظرية تعمم نظرية ٤ إلى رتب أعلى لمشتقات تحويل لابلاس .

نظرية ٥. تحت نفس معطيات نظرية ٣ نستنتج أن

$$L\left\{t^n f(t)\right\}(s) = (-1)^n \frac{d^n F}{ds^n}(s) \qquad (4)$$

مثال ٣. أوجد $L\left\{t \sin bt\right\}$.

الحل : حيث أننا نعلم مسبقا أن

$$L\left\{\sin bt\right\}(s) = F(s) = \frac{b}{\left(s^2 + b^2\right)}$$

فسنقوم باشتقاق $F(s)$

$$F'(s) = \frac{dF}{ds}(s) = -\frac{2bs}{\left(s^2 + b^2\right)^2}$$

و بتطبيق المعادلة (3) نجد أن

$$L\left\{t \sin bt\right\}(s) = \frac{2bs}{\left(s^2 + b^2\right)^2}$$

تمارين

باستعمال الجدول ١٢-١ ونتائج هذا البند ، أوجد تحويل لابلاس لكل من الدوال التالية ، مع استعمال المتطابقات المثلثية المناسبة إن دعت الحاجة :

(1) $t^2 + 4t - 5$

(2) $3t^2 - e^{2t}$

(3) $3 - 5e^{2t} + 4\sin t - 7\cos 3t$

(4) $e^{6t} + e^{-t}\cos 3t - 4$

(5) $t^3 - t^2 - 3t$

(6) $e^{-2t}\sin 2t - t^2 e^{3t}$

(7) $e^{-2t} + 4e^{-3t}$

(8) $\left(t^2 + 1\right)^2$

(9) $t\left(\sin t + e^{-t}\right)$

(10) $(t^2-1)^4$

(11) $t\,e^{2t}\cos 5t$

(12) $3e^{4t}-e^{-2t}$

(13) $\sin^2 t$

(14) $t\cos^3 t$

(15) $e^{-2t}(5\sin 2t-2\cos 2t)$

(16) $\sin 2t\ \sin 5t$

(17) $t\,e^{-t}\sin t$

استخدم نظرية ٥ لإيجاد :

(18) $L\{t\cos bt\}$

(19) $L\{t^2\cos bt\}$

١٢-٤ تحويل لابلاس العكسي

في البند ١٢-٢ عرفنا تحويل لابلاس بأنه مؤثر تكاملي يؤثر على دالّة $f(t)$ فيكون الناتج دالّة $F(s)$. وفي هذا البند سندرس مسألة إيجاد الدالّة $f(t)$ بمعلومية التحويل $F(s)$ ، أي أننا نبحث عن الدالّة العكسية لتحويل لابلاس .

تعريف ١. يقال عن الدالّة $f(t)$ (ويشار إليها بالرمز $L^{-1}\{F\}$) أنها تحويل لابلاس العكسي للدالّة $F(s)$ إذا كانت $f(t)$ متصلة على الفترة $[0,\infty)$ وتحقق المعادلة

$$L\{f\}(s)=F(s) \qquad (1)$$

ملاحظة. في حالة كون جميع الدوالّ المحققة للمعادلة (1) غير متصلة على الفترة $[0,\infty)$ ، فإننا نختار دالّة متصلة قطعيا محققة للمعادلة (6) لتمثل $L^{-1}\{F\}$. وعليه فإن تحويل لابلاس العكسي قد لايكون وحيدا ، الا أنه إذا كانت كل من الدالتين $f_1(t), f_2(t)$ متصلة على الفترة $[0,\infty)$ ، وكان $L\{f_1(t)\}=L\{f_2(t)\}$ ، فإن ذلك يقتضي تحقق المعادلة $f_1(t)=f_2(t)$.

أما الآن فيمكننا الاستعانة بالجدول ١٢-١ للحصول على الجدول التالي :

$F(s)$	$L^{-1}\{F\}(t)$
$1/s,\ s>0$	1
$1/(s-a),\ s>0$	e^{at}
$n!/s^{n+1},\ s>0$	$t^n;\ n=1,2,\dots$
$n!/(s-a)^{n+1},\ s>a$	$t^n e^{at};\ n=0,1,\dots$
$b/(s^2+b^2),\ s>0$	$\sin bt$
$s/(s^2+b^2),\ s>0$	$\cos bt$
$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>0$	$e^{at}\sin bt$
$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2},\ s>0$	$e^{at}\cos bt$

جدول ١٢-٢

بعض تحويلات لابلاس العكسية

نظرية ١ . بافتراض أن كلا من $L^{-1}\{F_1\}$ و $L^{-1}\{F_2\}$ موجود ومتصل على الفترة $[0,\infty)$، و c أي ثابت ، عندها يكون لدينا

$$L^{-1}\{F_1+cF_2\}=L^{-1}\{F_1\}+c\,L^{-1}\{F_2\}$$

وفيما يلي نستعرض بعض الأمثلة التي تعتمد أساسا على النظرية ١ والجدول ١٢-٢.

مثال ١. أوجد $L^{-1}\{s^{-4}\}$.

الحل : باستعمال الخاصية الخطية لتحويلات لابلاس العكسية نجد أن

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{3!}{3!\,s^4}\right\}=\frac{1}{3!}L^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}$$

ومن جدول ١٢-٢ نحصل على

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}=\frac{t^3}{3!}=\frac{t^3}{6}.$$

مثال ٢. أوجد $L^{-1}\left\{\frac{4}{s-5}-\frac{7s}{s^2+9}+\frac{5}{2s^2+8s+10}\right\}$.

الحل : باستعمال الخاصية الخطية نجد أن

$$\begin{aligned}I&=L^{-1}\left\{\frac{4}{s-5}-\frac{7s}{s^2+9}+\frac{5}{2s^2+8s+10}\right\}\\&=4L^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\}-7L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}+\frac{5}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+5}\right\}\end{aligned}$$

وباستعمال الجدول ١٢-٢ نحصل على قيمتي الحدين الأوليين

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\}=e^{5t}\,,\quad L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\}=\cos 3t$$

ولإيجاد قيمة الحد الثالث نكمل المربع في المقام ليكون $(s+2)^2+1$. وباستعمال الجدول ١٢-٢ مرة أخرى نجد أن

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1^2}\right\}=e^{-2t}\sin t$$

ومن ثم فالجواب النهائي هو

$$I=4e^{5t}-7\cos 3t+\frac{5}{2}e^{-2t}\sin t$$

مثال ٢. أوجد $L^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s^2+9}\right\}$.

الحل : باستعمال الخاصية الخطية والجدول ١٢-٢ نجد أن

$$L^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s^2+9}\right\}=2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}$$

$$=2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\}+\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}$$

$$=2\cos 3t+\frac{1}{3}\sin 3t$$

الكسور الجزئية . للكسور الجزئية دور هام في إيجاد تحويلات لابلاس العكسية . وسنذكر هنا بإيجاز الحالات الثلاث المهمة من الكسور الجزئية ، وهي كما يلي :

١ - الكسور التي يحتوي مقامها على عوامل خطية مختلفة مثل

$$F(s)=\frac{1}{(s-1)(s+3)(s+6)}$$

٢ - الكسور التي يحتوي مقامها على عوامل خطية مكررة مثل

$$F(s)=\frac{s+1}{s^2(s-2)^3}$$

٣ - الكسور التي يحتوي مقامها على مقدارمن الدرجة الثانية غير قابل للتحليل ، ومثال ذلك

$$F(s)=\frac{3s-5}{s^2(s^2+9)}$$

حيث لا يوجد للمقدار s^2+9 جذور حقيقية .

وفيما يلي نضرب مثالا لكل من هذه الحالات الثلاث المختلفة .

مثال ٤. أوجد $L^{-1}\{F\}$ حيث

$$F(s)=\frac{7s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)}$$

الحل : حيث أن المقام يتكون من ثلاثة عوامل خطية مختلفة ، فإنه يمكن إعادة كتابة $F(s)$ على النحو

$$\frac{7s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s-3} \qquad (2)$$

حيث $A\ , B, C$ أعداد حقيقية نسعى لإيجاد قيمها.

وهناك طريقتان مختلفتان لإيجاد الأعداد أو الثوابت $A\ , B, C$ ، الأولى منها تتلخص في ضرب طرفي المعادلة (2) بمقام الطرف الأيسر ، وبذلك نحصل على كثيرتي حدود متطابقتين . وبمساواة معاملات s^k ننتهي إلى نظام من المعادلات الخطية الذي يمكن حله لإيجاد الثوابت المجهولة $A\ , B, C$. ولنكتب ذلك رياضيا على النحو

$$7s-1=A\,(s+2)(s-3)+B\,(s+1)(s-3)+C\,(s+1)(s+2) \qquad (3)$$

والتي يمكن اختصارها إلى المعادلة

$$7s-1=(A+B+C)\,s^2+(-A-2B+3C)\,s+(-6A-3B+2C)$$

ومن ثم نحصل على النظام الخطي

$$\begin{aligned} A+B+C&=0\\ -A-2B+3C&=7\\ -6A-3B+2C&=-1 \end{aligned}$$

وبحل النظام نجد أن

$$A=2\ ,\ B=-3\ ,\ C=1$$

هذه طريقة . أما الطريقة الأخرى لإيجاد قيم الثوابت $A\ , B, C$ من المعادلة (3) فتتلخص في اختيار ثلاثة قيم مختلفة لـ s والتعويض عنها في المعادلة (3) . ولو أحسنا اختيار هذه القيم الثلاث لسهل علينا إيجاد المطلوب . ففي مثالنا هذا سنقوم باختيار $s=-1, -2, 3$ والتي تشكل جذور مقام $F(s)$. فاستعمال

التعويض $s=-1$ في المعادلة (3) يؤدي إلى

$$-7-1=A\,(1)\,(-4)+B\,(0)+C\,(0)$$
$$-8=-4A$$

أو $A=2$. ثم نضع $s=-2$ في (3) لنحصل على

$$-14-1=A\,(0)+B\,(-1)\,(-5)+C\,(0)$$
$$-15=5B$$

أو $B=-3$. وأخيرا نضع $s=3$ في(3) لنجد بطريقة مماثلة قيمة C المساوية 1 . ومن ثم ننتهي إلى صيغة الكسور الجزئية المطلوبة

$$\frac{7s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)}=\frac{2}{s+1}-\frac{3}{s+2}+\frac{1}{s-3}$$

وبالتالي نجد أن

$$L^{-1}\{F\}(t)=L^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}\right\}(t)+L^{-1}\left\{\frac{-3}{s+2}\right\}(t)+L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}(t)$$
$$=2L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}(t)-3L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}(t)+L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}(t)$$
$$=2e^{-t}-3e^{-2t}+e^{3t}$$

مثال ٥ . أوجد $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\}$.

الحل : لنفترض أن

$$\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+2}+\frac{D}{(s+2)^2}+\frac{E}{(s+2)^3}$$

وبالتالي

$$s+1=As\,(s+2)^3+B\,(s+2)^3+C\,s^2(s+2)^2+D\,s^2(s+2)+E\,s^2$$

باختيار $s=0$ و $s=-2$ نحصل بالترتيب على

$$1=B\,(2)^3\,,\quad -1=E\,(-2)^2$$

أو

$$B=\frac{1}{8}\ ,\ E=-\frac{1}{4}$$

وبمساواة معاملات s^4 , s^3 , s نحصل على

$$0=A+C$$
$$0=6A+B+4C+D$$
$$1=8A+12B$$

ومن ثم نحصل على

$$A=\frac{-1}{16}\ ,\ C=\frac{1}{16}\ ,D=0$$

وأخيرا نستعمل الخاصية الخطية ونتائج الجدول ١٢-٢ لنحصل على

$$L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\}(t)=L^{-1}\left\{-\frac{1}{16s}+\frac{1}{8s^2}+\frac{1}{16(s+2)}-\frac{1}{4\,(s+2)^3}\right\}(t)$$
$$=-\frac{1}{16}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t)+\frac{1}{8}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t)$$
$$+\frac{1}{16}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}(t)-\frac{1}{8}L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^3}\right\}(t)$$
$$=-\frac{1}{16}+\frac{1}{8}t+\frac{1}{16}e^{-2t}-\frac{1}{8}t^2e^{-2t}$$
$$=\frac{1}{16}\left(2t+e^{-2t}-2t^2e^{-2t}-1\right)$$

مثال ٦. أوجد $L^{-1}\left\{\dfrac{2s^2+10\,s}{(s^2-2s+5)(s+1)}\right\}$.

الحل : في البداية نلاحظ أن المقام يحتوي على المعامل s^2-2s+5 وهو غير قابل للاختصار لأن ليس له جذور حقيقية ، وبالتالي فإننا نكتب هذا المقدار في الصيغة $(s-\alpha)^2+\beta$ عن طريق إكمال المربع .

$$s^2-2s+5=(s-1)^2+2^2$$

ولأن كلا من s^2-2s+5 و $s+1$ لا يتكرر في المقام ، فإن صيغة الكسور الجزئية

تكون على النحو

$$\frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)}=\frac{A(s-1)+2B}{(s-1)^2+2^2}+\frac{C}{s+1}$$

وبضرب الطرفين في المقام المشترك نحصل على

$$2s^2+10s=\left[A(s-1)+2B\right](s+1)+C(s^2-2s+5) \qquad (3)$$

وباستعمال التعويض $s=-1$ نجد أن

$$2-10=\left[A(-2)+2B\right](0)+C(8)$$

أو

$$-8=8C$$

وبالتالي $C=-1$. وباخذ $s=1$ نحصل على

$$2+10=\left[A(0)+2B\right](2)+C(4)$$

وبما أن $C=-1$ ، فإن المعادلة الأخيرة تصبح على النحو

$$12=4B-4$$

وبالتالي

$$B=4$$

وأخيرا نضع $s=0$ في(3) ونعوض عن قيمتي B , C لنصل إلى

$$0=\left[A(-1)+2B\right](1)+C(5)=-A+8-5$$

أو

$$A=3$$

وأخيرا نجد الدالّة المطلوبة

$$L^{-1}\left\{\frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+s)(s+1)}\right\}(t)=L^{-1}\left\{\frac{3(s-1)+2(4)}{(s-1)^2+2^2}-\frac{1}{s+1}\right\}(t)$$

$$=3L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right\}(t)$$

$$+4L^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right\}(t)-L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}(t)$$

$$=3e^t\cos 2t+4e^t\sin 2t-e^{-t}.$$

تمارين

أوجد $L^{-1}\{F\}$ حيث $F(s)$ معطى بالمعادلات التالية :

(1) $\dfrac{s+1}{s^2+2s+10}$

(2) $\dfrac{2}{s^2+4}$

(3) $\dfrac{3s}{s^2+4s+13}$

(4) $\dfrac{3}{(2s+5)^3}$

(5) $\dfrac{1}{s^2+2s+10}$

(6) $\dfrac{s}{s^2+4s+4}$

(7) $\dfrac{s}{s^2+6s+13}$

(8) $\dfrac{s-1}{2s^2+s+6}$

(9) $\dfrac{2s-3}{s^2-4s+8}$

(10) $\dfrac{2s+3}{(s+4)^3}$

(11) $\dfrac{s^2}{(s-1)^4}$

(12) $\dfrac{3s+1}{s^2+6s+13}$

(13) $\dfrac{2(s+8)}{s^2+4s+13}$

(14) $\dfrac{s}{(s-1)^4}$

(15) $\dfrac{2s-10}{s^2-4s+20}$

(16) $\dfrac{s+11}{(s-1)(s+3)}$

(17) $\dfrac{5s^2+34s+53}{(s+3)^2(s+1)}$

(18) $\dfrac{s-11}{(s-2)(s+1)(s-3)}$

(19) $\dfrac{s+17}{(s-1)(s+3)}$

(20) $\dfrac{7s^2+23s+30}{(s-2)(s^2+2s+5)}$

(21) $\dfrac{1}{s^3(s^2+1)}$

(22) $\dfrac{2s^2+5s-4}{s^3+s^2-2s}$

(23) $\dfrac{4(s+1)}{s^2(s-2)}$

(24) $\dfrac{5s-2}{s^2(s+2)(s-1)}$

(25) $\dfrac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}, a^2 \neq b^2,\ ab \neq 0$

٥-١٢ حل مسألة القيمة الابتدائية

وكما جاء في مقدمة هذا الباب ، فإن الهدف الرئيسي هو الإفادة من تحويلات لابلاس في حل المسائل الابتدائية للمعادلات التفاضلية الخطية ، مع التركيز على المعادلات ذات الرتبة الثانية .

ومن المعلوم أنا قد درسنا حلول هذه المسائل من قبل باستعمال طرق أخرى مختلفة . ولكن كل هذه الطرق السابقة كانت تتطلب إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية ، ومن ثم التعويض بالقيم الابتدائية لإيجاد الحل المطلوب . أما بالنسبة لطريقة الحل باستعمال تحويلات لابلاس ، فإننا نجد حل المسألة الابتدائية دون الحاجة لإيجاد الحل العام .

ولا تقتصر تطبيقات تحويلات لابلاس على إيجاد حل المسألة الابتدائية للمعادلة التفاضلية ذات المعاملات الثابتة فحسب ، وإنما تتجاوز ذلك إلى المعادلات ذات المعاملات المتغيرة.

وأهمية أخرى تكتسبها طريقة تحويلات لابلاس ناتجة عن إمكانية تطبيقها حتى على المعادلات غير المتجانسة التي يكون طرفها الأيمن غير الصفري مساو لدالّة غير متصلة ، ولكننا لن نعالج هذه الحالة في هذا الباب .

وسنبدأ هذا البند بذكر خطوات طريقة تحويلات لابلاس لحل المسألة الابتدائية .

طريقة تحويلات لابلاس

لإيجاد حل مسألة القيمة الابتدائية نتبع الخطوات التالية :

أ – نجد تحويل لابلاس لطرفي المعادلة عن طريق استخدام الخصائص المختلفة لتحويلات لابلاس إضافة إلى الشروط الابتدائية للمسألة وذلك للحصول على معادلة تحتوي على تحويل لابلاس للحل المطلوب ثم نحل هذه المعادلة حلا جبريا لإيجاد تحويل لابلاس للحل المطلوب .

ب – نجد تحويل لابلاس العكسي للتحويل الناتج من (أ) باستعمال الجدول ١٢–٢ أو باستعمال طريقة مناسبة كالكسورالجزئية مثلا إضافة إلى الجدول ١٢–٢ لنحصل على الحل المطلوب .

وقبل أن نشرع في إعطاء الأمثلة نحب أن نذكّر هنا بمعادلتين هامتين (انظر النظرية ٢ والنظرية ٣ في البند ١٢–٣) ، وهما :

$$L\{y'\}(s) = s\,L\{y\}(s) - y(0) \qquad (1)$$

$$L\{y''\}(s) = s^2 L\{y\}(s) - s\,y(0) - y'(0) \qquad (2)$$

مثال ١. أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية التالية

$$y'' - 2y' + 5y = -8e^{-t}\,;\ y(0) = 2,\ y'(0) = 12 \qquad (3)$$

الحل : حيث أن المعادلة (3) متطابقة بين دالتين في المتغير t فلا بد أن يتطابق تحويل لابلاس للطرفين ، أي أن

$$L\{y'' - 2y' + 5\}(s) = L\{-8e^{-t}\}(s)$$

وباستعمال الخاصية الخطية لتحويل لابلاس وكذلك جدول ١٢-١ نحصل على

$$L\{y''\}(s) - 2L\{y'\}(s) + 5L\{y\}(s) = \frac{-8}{s+1}$$

الآن نستعمل المعادلتين (1) ,(2) ، وللاختصار والسهولة نضع $Y(s) = L\{y\}(s)$.

وبالتالي

$$L\{y'\}(s) = sY(s) - y(0) = sY(s) - 2$$

$$L\{y''\}(s) = s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - 2s - 12$$

وبالتعويض عن هاتين القيمتين في المعادلة (3) ، والحل لإيجاد $Y(s)$ نتحصل على

$$\left\{s^2 Y(s) - 2s - 12\right\} - 2\left\{sY(s) - 2\right\} + 5Y(s) = \frac{-8}{s+1}$$

أو

$$\left(s^2 - 2s + 5\right)Y(s) = 2s + 8 - \frac{8}{s+1} = \frac{2s^2 + 10s}{s+1}$$

ومنه

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 10s}{\left(s^2 - 2s + 5\right)(s+1)}$$

ويتبقى علينا الآن إيجاد تحويل لابلاس العكسي للدالّة الكسرية $Y(s)$ ، ولكننا قد فعلنا ذلك في مثال ٦ من البند السابق باستعمال الكسور الجزئية حيث وجدنا أن

$$y(t) = 3e^{t}\cos 2t + 4e^{t}\sin 2t - e^{-t}$$

وهو الحل المطلوب للمعادلة (3) .

مثال ٢. أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t}\ ;\ y(0) = y'(0) = 0 \qquad (4)$$

الحل :

$$L\{y''\}(s) + 4L\{y'\}(s) + 6L\{y\}(s) = L\{1\}(s) + L\{e^{-t}\}(s)$$

أو

$$s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + 4\left[sY(s) - y(0)\right] + 6Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

ومنه

$$\left(s^2 + 4s + 6\right) Y(s) = \frac{2s+1}{s\,(s+1)}$$

وبالتالي

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s\,(s+1)\,(s^2+4s+6)}$$

وبتطبيق طريقة الكسور الجزئية نجد أن

$$\frac{2s+1}{s\,(s+1)\,(s^2+4s+6)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4s+6}$$

وهذا يؤدي إلى المعادلة

$$2s + 1 = A\,(s+1)\,(s^2+4s+6) + Bs\,(s^2+4s+6) + (Cs+D)\,s\,(s+1)$$

وباختيار $s = 0$ ثم $s = -1$ نحصل على $A = \frac{1}{6}\ , B = \frac{1}{3}$. وبمساواة معاملات $s^3\ , s$ نحصل على

$$A + B + C = 0$$
$$10A + 6B + D = 2$$

وبحل هاتين المعادلتين آنيا ينتج لدينا أن $D = \frac{-5}{3}\ , C = \frac{-1}{2}$. وبالتالي

$$Y(s) = \frac{(1/6)}{s} + \frac{(1/3)}{s+1} + \frac{(-s/2) - (-5/3)}{s^2+4s+6}$$

$$= \frac{1}{6s} + \frac{1}{3\,(s+1)} + \frac{(-1/2)\,(s+2) - (2/3)}{(s+2)^2+2}$$

$$= \frac{1}{6s} + \frac{1}{3(s+1)} - \frac{1}{2}\,\frac{s+2}{(s+2)^2+2} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{(s+2)^2+2}$$

وأخيرا نجد $y(t)$ باستعمال الجدول ١٢-١ والخاصية الخطية لتحويل لابلاس العكسي

$$y(t) = \frac{1}{6} L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) + \frac{1}{3} L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}(t)$$
$$-\frac{1}{2} L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+2}\right\}(t) - \frac{2}{3\sqrt{2}} L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{(s+2)^2+2}\right\}(t)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t} \cos\sqrt{2}\, t - \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-2t} \sin\sqrt{2}\, t$$

مثال ٣. أوجد حل المسألة الابتدائية

$$y'' + 16y = \cos 4t \ ; \ y(0) = 0 \, , \ \ y'(0) = 1 \qquad (5)$$

الحل : من الواضح أن بإمكاننا استعمال طريقة تغير الوسطاء لإيجاد حل هذه المعادلة التفاضلية بشروطها الابتدائية المعطاة ، ولكن هذه الطريقة تتطلب منا حساب قيم الثوابت التي تظهر في الحل العام $y = y_c + y_p$. أما اتباع طريقة تحويلات لابلاس فسيجنبنا بلا شك عناء حساب قيم هذه الثوابت ، فبعد التأثير بتحويل لابلاس على طرفي المعادلة (5) واستعمال المعادلتين (1) , (2) نحصل على

$$(s^2+16)Y(s) = 1 + \frac{s}{s^2+16}$$

أو

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+16} + \frac{s}{(s^2+16)^2}$$
$$= \frac{1}{4}\, \frac{4}{(s^2+16)} + \frac{1}{8}\left(\frac{8s}{(s^2+16)^2}\right)$$

وإذا

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}(t) = \frac{1}{4} L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\}(t) + \frac{1}{8} L^{-1}\left\{\frac{8s}{(s^2+16)^2}\right\}(t)$$

من الجدول ١٢-٢ نجد الحد الأول من الطرف الأيمن . أما بالنسبة للحد الثاني فنستعمل النظرية ٤ في البند ١٢-٣ بعد أخذ تحويل لابلاس العكسي للطرفين

ووضع $F(s) = \dfrac{4}{s^2+16}$. ومن ثم نجد أن الحل الخاص المطلوب للمعادلة (5) هو

$$y(t) = \frac{1}{4}\sin 4t + \frac{1}{8} t \sin 4t$$

من الملاحظ حتى الآن أن مسائل القيمة الابتدائية التي عالجناها في الأمثلة السابقة كانت كلها ذات معاملات ثابتة ، فماذا لو كان أحد هذه المعاملات متغيرا ؟ والجواب أن ذلك لا يؤثر كثيرا على وجود الحل أو طريقة إيجاده طالما وُجدت تحويلات لابلاس لطرفي المعادلة ، لكن هناك حقيقة هامة قد يعتمد عليها إيجاد الحل ، سنذكر نصها هنا دون برهان .

نظرية ١ . إذا كانت f دالّة متصلة قطعيا على الفترة $[0,\infty)$ وذات رتبة أسيّة ، فإن

$$\lim_{s\to\infty} L\{f\}(s) = 0$$

مثال ٤ . أوجدْ حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y'' + 2t\, y' - 4y = 1\ ;\ y(0) = 0 = y'(0) \qquad (6)$$

الحل : بالتأثير بتحويل لابلاس على طرفي المعادلة (6) ينتج لدينا

$$L\{y''\}(s) + 2L\{ty'\}(s) - 4Y(s) = \frac{1}{s} \qquad (7)$$

من المعادلة (2)

$$L\{y''\}(s) = s^2\, Y(s) - s\, y(0) - y'(0) = s^2\, Y(s) \qquad (8)$$

أما المعادلة (3) من البند ١٢-٣ فتعطينا

$$\begin{aligned} L\{t\, y'(t)\}(s) &= -\frac{d}{ds}\left[L\{y'(t)\}(s)\right] \\ &= -\frac{d}{ds}\left[s\, Y(s) - y(0)\right] \qquad (9) \\ &= -sY'(s) - Y(s) \end{aligned}$$

وبالتعويض من (8) و (9) في المعادلة (7) نحصل على

$$s^2\ Y(s) + 2\left[-\ sY'(s) - Y(s)\right] - 4Y(s) = \frac{1}{s}$$

أو

$$-2sY'(s) + \left(s^2 - 6\right)\ Y(s) = \frac{1}{s}$$

أو

$$Y'(s) + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{2}\right)Y(s) = -\frac{1}{2s^2} \qquad (10)$$

والمعادلة (10) معادلة خطية من الرتبة الأولى لها عامل مكاملة هو

$$u(s) = e^{\int\left(\frac{3}{s}-\frac{s}{2}\right)ds} = e^{\ln s^3 - \frac{s^2}{4}} = s^3\, e^{-\frac{s^2}{4}}$$

ومن ثم نضرب المعادلة (1 0) في $u(s)$ لنجد أن

$$\frac{d}{ds}\left\{u(s)Y(s)\right\} = \frac{d}{ds}\left[s^3 e^{-\frac{s^2}{4}}\, Y(s)\right] = -\frac{s}{2}\, e^{-\frac{s^2}{4}}$$

وبمكاملة الطرفين نحصل على

$$s^3 e^{-s^2/4}\ Y(s) = -\int \frac{s}{2}\, e^{-s^2/4}\, ds = e^{-s^2/4} + c$$

وبضرب الطرفين في $s^{-3}\, e^{s^2/4}$ ننتهي إلى المعادلة

$$Y(s) = \frac{1}{s^3} + c\,\frac{e^{s^2/4}}{s^3}$$

الآن نلجأ إلى النظرية ١ أعلاه فنقول إن المعادلة

$$\lim_{s \to \infty} Y(s) = 0$$

لا تتحقق الا إذا تحقق الشرط

$$\lim_{s \to \infty} \frac{c\, e^{s^2/4}}{s^3} = c \lim_{s \to \infty} \frac{e^{s^2/4}}{s^3} = 0$$

وحيث أن

$$\lim_{s\to\infty} \frac{e^{s^2/4}}{s^3} = \infty$$

فلا بد أن يكون $c = 0$. وعليه فإن

$$Y(s) = \frac{1}{s^3}$$

ومنه

$$L^{-1}\{Y(s)\}(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}(t)$$

أو

$$y(t) = \frac{t^2}{2}$$

ومن السهل التأكد أن $y(t)$ هو الحل المطلوب للمعادلة (6) وذلك بمجرد التعويض فيها .

٦-١٢ ملخص الباب

لقد رأينا في هذا الباب كيف أن تحويلات لابلاس تساهم إلى حد كبير في عملية تبسيط إجراءات حل مسألة القيمة الابتدائية لبعض المعادلات التفاضلية ، خاصة عندما يكون الطرف الأيمن دالّة متصلة قطعيا وليست متصلة على كامل الفترة $[0,\infty)$.

وقد عرفنا تحويل لابلاس $L\{f\}$ لدالّة f بأنه التكامل المعتل

$$L\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

لجميع قيم s التي تحقق وجود التكامل المعتل .

وقد علمنا أيضا أن $L\{f\}(s)$ يتأكد وجوده لجميع قيم s الأكبر من α إذا كانت f متصلة قطعيا على الفترة $[0,\infty)$ ومن الرتبة الأسية α .

ويمكن اعتبار تحويل لابلاس بأنه مؤثر تكاملي يؤثر على دالّة $f(t)$ فيكون الناتج دالّة $F(s)$.

ولتحويلات لابلاس خصائص عديدة ذكرنا منها مانحتاج اليه في هذا الباب وهما :

أ - الخاصية الخطية .

ب - خاصية الازاحة .

ثم وجدنا تحويلات لابلاس للمشتقة ، ومشتقة تحويل لابلاس ، وكذلك المشتقات ذات الرتب العليا لتحويل لابلاس .

أما البند ١٢-٤ فقد تناولنا فيه تحويل لابلاس العكسي والخاصية الخطية ، ثم عرضنا لأهمية الكسور الجزئية في إيجاد هذه التحويلات العكسية .

وأما البند ١٢-٥ فقد صُبت فيه زبدة البنود السابقة حيث عالجنا فيه كيفية إيجاد حل مسألة القيمة الابتدائية بطريقة تحويلات لابلاس . ورأينا أن استعمال هذه الطريقة يوجد لنا الحل النهائي مباشرة دون الحاجة إلى المرور بمرحلة إفتراض حل على صورة معينة وذي ثوابت مجهولة ثم العمل على إيجاد هذه الثوابت كما كان الحال في طريقتي تغير الوسطاء واختزال الرتبة أو غيرها مما سبق .

١٢-٧ تمارين عامة

باستعمال طريقة تحويلات لابلاس ، أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية المعطاة في التمارين من ١ إلى ١٥ :

(1) $y'' + 4y' - 5y = t\ e^{t}\ ;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

(2) $y'' + 2y' + y = 3t\,e^{-t}\ ;\ y(0) = 4 = 2y'(0)$

(3) $y' = e^{t}\ ;\ y(0) = 2$

(4) $y' = 2e^{t}\ ;\ y(0) = -1$

(5) $y'' - 2y' = -4\ ;\ y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 4$

(6) $y'' - 6y' + 9y = t^{2}e^{3t}\ ;\ y(0) = 2\ ,\ y'(0) = 6$

(7) $y'' + 5y' - 6y = 21\, e^t\,;\ y(0) = -1 = y'(0) - 10$

(8) $y'' + 9y' = 40e^x\ ;\ y(0) = 5\ ,\ y'(0) = -2$

(9) $y'' + y = t\ ;\ y(\pi) = y'(\pi) = 0$

(10) $y'' + y = 4\, e^t\,;\ y(0) = y'(0) = 0$

(11) $y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t}\ ;\ y(0) = y'(0) = 0$

(12) $y'' + 3y' + 2y = 4t^2\,;\ y(0) = y'(0) = 0$

(13) $y'' + y = \sin t\ ;\ y(0) = 1 = -y'(0)$

(14) $y'' - y' = e^t \cos t\ ;\ y(0) = y'(0) = 0$

(15) $y'' - 4y' + 4y = 4\cos 2t\ ;\ y(0) = 2\ ,\ y'(0) = 5$

في التمارين من ١٦ إلى ٢٥ أوجد تحويل لابلاس للحل $y(t)$ لكل من المسائل الابتدائية المعطاة ، أي أوجد $Y(s)$ فقط :

(16) $y'' - 3y' + 2y = \cos t\ ;\ y(0) = 0\ ,\ y'(0) = -1$

(17) $y'' + 2y' + y = t\ ;\ y(0) = -3\ ,\ y(1) = -1$

(18) $y'' + 6y = t^2 - 1\,;\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1$

(19) $y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t}\,;\ y(0) = y'(0) = 0$

(20) $y'' - 6y' + 5y = t\, e^t\,;\ y(0) = 2\ ,\ y'(0) = -1$

(21) $y'' + 4y = \cos 4t\ ;\ y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 1$

(22) $y'' - 2y' + y = \cos t - \sin t\,;\ y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 3$

(23) $y'' + \beta^2 y = A \sin wt\ ;\ y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 0$

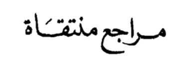
(24) $y'' - y = g(t)\,;\ y(0) = 1 = y'(0) - 1,\ g(t) = \begin{cases} 1, & t < 3 \\ t, & t > 3 \end{cases}$

(25) $y'' - 3y' + 2y = 12e^{4t}\,;\ y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 0$

أوجد حل كل من المعادلتين التفاضلتين التاليتين من الرتبة الثالثة :

(26) $y''' - y'' + y' - y = 0\,;\ y(0) = 1 = y'(0)\ ,\ y''(0) = 3$

(27) $y''' + 4y'' + y' - 6y = -12\,;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 4\ ,\ y''(0) = -2$


مراجع منتقاة

مراجع منتقاة .

بويس ، وليم وديبريما ، ريتشارد ، مبادئ المعادلات التفاضلية ، ترجمة أحمد علاونة وحسن العزة ، الطبعة الثالثة . نيويورك : دار جون وايلي وأبنائه ، ١٩٨٣ م .

Braure, F. and **Nohel, J.A.,** *Ordinary Differential Equations: a First Course,* 2*nd* ed., W.A. Benjamin, Inc., Menlo Park, CA., 1973.

Derrick, W.R. and **Grossman, S.I.,** *Elementary Differential Equations with Applications,* Addison-Wesely Publ. Co., Reading, MA., 1976.

Nagle, R.K. and **Saff, E.B.,** *Fundamentals of Differential Equations,* Benjamin/Cummings Publ. Co., Inc., Menlo Park, CA., 1981.

Rainville, E.D. and **Bedient, P.E.,** *Elementary Differential Equations,* 6*th* ed., Macmillan Publ. Co., Inc., New York, 1981.

Simmons, G.F., *Differential Equations with Applications and Historical Notes,* McGraw-Hill, New York, 1973.

Spiegel, M.R., *Applied Differential Equations,* 3*rd* ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1981.

Zill, D.G., *A First Course in Differential Equations withApplications, 2nd.,* ed., Prindle, Weber and Schmidt, 1982.

أجوبة التمارين

البند ٢-٣

1. $y \ln|c(1-x)| = 1$
2. $y = \frac{1}{2}\sin 2x + c$
3. $3y = 2e^{-3x} + c$
4. $\sin y \ \cos x = c$
5. $\cos x - \ln|\sec x + \tan x| = c$
6. $y = cx^4$
7. $y = (x^3 - 3x + c)^{1/3}$
8. $y = ce^{-x^2}$
9. $\ln|y| = 2x - \cos x + c$
10. $(x+1)^2 + y^2 + 2\ln|c(x-1)| = 0$
11. $-3e^{-2y} = 2e^{3x} + c$
12. $x^2 + \tan^2 y = c^2$
13. $\ln|y| + y^2 = c - \cos x$
14. $y = 1/(c - e^{\cos x})$
15. $c^2y^2 = 4 + e^{2x}$
16. $x \ln x + y \ln y = c$
17. $y = \sqrt{5x-1}$
18. $y = -\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4x^3 + 8x^2 + 8x}\right)$
19. $(1+\cos x)(1+e^y) = 4$
20. $x = \tan(4t - 3\pi/4)$
21. $y = 4e^{x^3/3} - 1$
22. $y = -3e^{-(1+\cos x)}$
23. $xy = e^{-(1+x^{-1})}$
24. $y = \tan\left[\pi/3 - \ln|\cos x|\right]$
25. $(x/2)^{2/3}$
26. $y = -(x/2)^{2/3}$

البند ٢-٤

1. $x^2 + 4x + (3/2)y^2 - y = c$
2. $x^2 + 4xy + y^2 = c$
3. $xy^2 - x^2y + 3x^2 - 2y = c$
4. $x^2 = cy(y+2)^3$
5. $y(x+1)^3 = cx$
6. $x \sin y + y \cos x - y^2/2 = c$
7. $x^2 + \sin(xy) = c$
8. $(w^2 + z^2)^2 = 4wz + c$
9. $xy - 2xe^x + 2e^x - 2x^3 = c$
10. not exact
11. $x^2y - x \tan y = c$
12. $y = cx^2$
13. $x + y + xy - 3\ln|xy| = c$
14. $y = \left[c + e^t(t-1)\right]/(1+e^t)$
15. $\sin x \cos y = \ln|c \sin x|$
16. $2\tan^{-1} x + \ln(1+y^2) = c$
17. not exact
18. $xy(x^2 - 3) = 4(1 - y^2)$
19. $(1/3)x^3 + x^2y + xy^2 - y = 4/3$
20. $e^{xy} = 2xy^3 + y^2 - 3$
21. $4xy + x^2 - 5x + 3y^2 - y = 8$
22. $xy + 2y + e^x + ye^y - e^y = c$
23. $(xy-2)^2 + (x+3)^2 = 2y^2 + 15$

البند ٢-٥

1. $\ln(x^2+y^2)+4\tan^{-1}(y/x)=c$
2. $x^2=6y^2\ln|y/c|$
3. $(x-y)\ln|x-y|=y+c(x-y)$
4. $\ln(x^2+y^2)+2\tan^{-1}(y/x)=c$
5. $y^2=2x^2\ln|x/c|$
7. $(3v+u)^2=c(v-u)$
8. $(y/x)^2=2\ln|x|+c$
10. $y^9=c(x^3+y^3)^2$
11. $x(y+x)^2=c(y-2x)$
12. $y=ce^{2\sqrt{x/y}}$
13. $y^3(x+y)=ce^{x/y}$
14. $(x-y)\ln x+y\ln y=cx+y$
15. $y\ln|cy|=(y-x)e^{x/y}$
17. $e^{2x/y}=8\ln|y|+c$
18. $y^3+3x^3\ln|x|=8x^3$
19. $2(x+2y)+(x+y)\ln|x+y|=0$
20. $y^2=4x(x+y)^2$
21. $4(2y+x)\ln y=2y-x$
22. $\ln|x|=e^{y/x}-1$
24. $3x^3-x^2y-2y^2=0$
25. $y+3x=(y+4x)\ln(y+4x)$

البند ٢-٦

1. $y=2(x+1)^{-1}+c(x+1)^{-3}$
2. $y=ce^{-5x}+1/10$
3. $y=e^{3x/2}+ce^{x}$
4. $y=ce^{-x^3}+1/3$
5. $y\sin x=x+c$
6. $x=-(4/5)y^2+cy^{-1/2}$
7. $y=-\cos x+\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{c}{x}$
8. $y(e^x+1)=c$
9. $y=2(3x-1)^{1/3}+c(3x-1)^2$
10. $y(\sec x+\tan x)=x-\cos x+c$
11. $y=x+c(1+x^2)^{1/2}$
12. $y=e^{-3x}\left(1+cx^{-1}\right)$
13. $xv^2=ce^{v}+v+1$
14. $y=e^{-x}\ln(e^{x}+e^{-x})+ce^{-x}$
15. $3y\cos^3 x=3\sin x-\sin^3 x+c$
16. $y=(1+\cos x)(x-\sin x+c)$
17. $y=(5/3)(x+2)^{-1}+c(x+2)^{-4}$
18. $xy^2=(1/2)(y^2-y+1/2)+ce^{-y}$
19. $2y=|2x+3|^{1/2}\ln|2x+3|$
20. $2y=x^2-1+2e^{1-x^2}$
21. $(1+x)t^{2/3}=2$
22. $y(x-2)=2x$
23. $y^2-2xy+16=0$
24. $y=2x+2e^{-2x}-1$
25. $(x+1)y=x\ln|x|-x+21$
26. $y=\cos x(\sin x-1)$
27. $y=2x-1$
28. $y=e^{3x}(x-1)+e^{2x}(3-x^2/2)$

البند ٢–٨

1. $e^x + ye^{-y} = c$
2. $x + 1 = y + ce^{-y}$
3. $y(x+1) = cx(y+1)$
4. $x^2y - x^3 + y^{-2} = c$
5. $x(x+2y) = c$
6. $2y^2 + x^2 = 9x^6$
7. $y = (7\ln|x| + c)^{-1/7}$
8. $\tan^{-1}(x/t) + (1/2)\ln\left[\dfrac{x^2}{t^2} + 1\right] + \ln|ct| = 0$
9. $e^{xy} - 4y^3 = 5$
10. $x^4 - y^4 + 4xy^3 = c$
11. $2y^2\ln|y| - y^2 = 4xe^x - 4e^x - 1$
12. $y^2 + 2xy - x^2 = c$
13. $4y = x\sin 2x - 2x^2\cos 2x$
14. $2y^5 - 2x^2y^3 + 3x = 0$
15. $4\ln|\sec x + \tan x| = 2t + \sin 2t + c$
16. $2y = x^2 - 1 + 4e^{1-x^2}$
17. $x^3 = c(y-x)e^{y/x}$
18. $x(3y^2 - 2x^2) = c$
19. $2x^2\ln|x| = y^2 - 16x^2$
20. $2x^4y = x^2 + 2x + 2\ln|x-1|$
21. $x(\csc t - \cot t) = t - \sin t + c$
22. $2(x+2y) + (x+y)\ln|x+y| = 0$
23. $x = y\ln|cxy|$
24. $t = x^2(1 + x\ln|x|)$
25. $y = \sin x + c\cos x$
26. $v = u - u^3 + c(1-u^2)^{1/2}$
27. $x(2t^2 - x) = 0$
28. $x\sin y + yx^{-1} + \ln|x| = c$
29. $vu = -e^{-(1+u^{-1})}$
30. $2y = \sin x + (x+2)\sec x$
31. $y^2x = ce^{2y} - (y+1)e^y$
32. $(u+v)(u^2 - 4uv + v^2) = c$
33. $y(1+\sin x) = (x + 2 - \cos x)\cos x$
34. $2x^3 + 2x^2v - 3v = 0$
35. $y(x^2 - \sin x^2) = x - c$
36. $x^2y^2 + 2xy - x^2 = c$
37. $y = -3(x+1)$
38. $y = e^{x+1} - 3(x+1)$
39. $y = 2x + 3e^{-2x} - 1$
40. $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \pi/3$

البند ٤–٢

1. $x(xy+1) = cy$
2. $2x^3y - x^2 = cy^2$
3. $xy^2 - y = cx$
4. $1 + u^2v = cu^2v^2$
5. $y(x^2+1) = cx$
6. $x + y = \sqrt{x^2 + y^2} + c$
7. $2u^2e^{uv} + v^2 = cu^2$
8. $x^2 + cxy + y^2 = 1$

9. $x^2y + x + y = cxy^2$
10. $\ln(x^2+y^2) = 2xy + c$
11. $u^2v^2 = 2\ln|cv/u|$
12. $x^3 + xy^2 - 2y = cx$
13. $2x^2\cos(xy) = cx^2 - 1$
14. $\ln(x^2+y^2) + 2y - 2x = c$
15. $\cos(uv) = ce^u$
16. $(x^2+y^2)^{3/2} = 3xy + c$
17. $xy^2 - x^2 + 2y = 0$
18. $x^3y^3 + 4y^2 - 7xy + 2x = 0$
19. $x^2 - y^2 + \ln\left|\dfrac{x-y}{x+y}\right| = c$
20. $y + x^4 - x^2 = 0$
21. $2x^4 = (2-x)y^2$
22. $x^4 = y^2(1+cx)$
23. $\ln(x^2+2y^2) = x^2 + y^2 + c$
24. $x^3 - x^2y - y = cx^2$
25. $x^2 - 2\ln(y^2 + \sin^2 x) = c$

البند ٤-٣

1. $x^2 - 2xy = c$
2. $2x + \ln(x^2+y^2) = c$
3. $x^5 - 5x^3y = c$
4. $2x^2 + xy + 2y\ln|y| = cy$
5. $xy + \ln|y| + 2x^2 - 2x = c$
6. $x^2\cos 3x + 3y = cx^2$
7. $v(2u+v) = ce^u$
8. $x = e^{-2t} + 4e^{-3t}$
9. $x^2 - y^2 = cy^3$
10. $3x^2y^4 - 1 = cx^2y^2$
11. $y^2(y^2 + 4xy - 2) = c$
12. $u - 3v - 3 = ce^v$
13. $x^2\ln|x| - y = cx^2$
15. $x^2 = 4y^2\ln|cy|$
16. $xy^2 = c(x+2y)$
17. $t^2 = 2x^2\ln|cx^2t^{-1}|$
18. $y^2 = 2x^2$

البند ٤-٤

1. $x + 3y + c = 3\ln|x+2y+2|$
2. $\tan(6x+c) = 2/3(9x+4y+1)$
3. $x + c = \tan(x+y) - \sec(x+y)$
4. $\cos v\tan^2 u = \tan^3 u + c$
5. $(2t+x-1)^2 = 2t + c$
6. $\sin x\ln y = x\cos x - \sin x + c$
7. $(\sin^2 u + 3\cos^2 v)\sin u = c$
8. $7(4x-y-4) = 8\ln\left|\dfrac{1}{13}(21x+7y-8)\right|$
9. $\tan^{-1}(3x+y) = 2x + \dfrac{\pi}{4}$

البند ٤-٥

1. $y^2(c-x)=x^3$
2. $(2x^3-y)^2=cyx^6$
3. $y=(1-x+ce^{-x})^{-1}$
4. $y^2=x(5-x^2)$
5. $\left(\beta/\alpha+c\,e^{\alpha(1-n)x}\right)^{1/(1-n)}=0$
6. $x^2=y^3(x+2)$
7. $5x^2y^3=x^5+4$
8. $2y^2=x^2\,(3x-1)$
9. $y^{-2}=x^2\,(c-x^2)$
10. $y^3=3(1-6x^{-2})\sin x+cx^{-3}+9x^{-1}(\cos x-2x^{-2}\cos x)$
11. $20y^{-2}=10x+ce^{-10x}-1$
12. $y^{-2}=ce^{-2x}-e^{2x}/2$
13. $y=5x^2/(x^5+c)$
14. $v^2(2u^2\ln|u|+cu^2)=1$
15. $x=y^2/(c-y)$

البند ٤-٦

1. $(x-y-1)^2=c\,(x+y-3)$
2. $(y+2)^2+2(x+1)(y+2)-3(x+1)^2=c$
3. $u-3=(2-v)\ln|c\,(v-2)|$
4. $\left(x+\frac{6}{5}\right)^2+\left(x+\frac{6}{5}\right)\left(y+\frac{8}{5}\right)-\left(y+\frac{8}{5}\right)^2=c$
5. $y=\frac{1}{4}(x+c)^2-x$
6. $\ln\left[(u-1)^2+(v+2)^2\right]-8\tan^{-1}\left(\frac{u-1}{v+2}\right)=c$
7. $\ln\left[(y+3)^2+3(x-1)^2\right]+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{y+3}{\sqrt{3}\,(x-1)}\right)=c$
8. $(w+z-3)^3=c\,(2w+z-4)^2$
9. $\ln\left[(y+1)^2+(x-1)^2\right]+2\tan^{-1}\left(\frac{y+1}{x-1}\right)=c$
10. $x+2y+c=3\ln|x+y+2|$
11. $2(y+1)=-(x+2y)\ln|c\,(x+2y)|$
12. $(u-2v-1)^2=c\,(u-3v-2)$
13. $\ln\left[9(x-1)^2+(y-1)^2\right]-2\tan^{-1}\left(\frac{y-1}{3(x-1)}\right)=c$
14. $3u-v+c=5\ln|2u-v+4|$
15. $(2y-x+3)^2=c(y-x+2)$

16. $v-1=3(v-3u-1)\ln|c(3u-v+1)|$
17. $y-1=(x+2y-3)\ln|c(x+2y-3)|$
18. $3(y-2)=2(1-x)\ln[(x-1)/2]$
19. $2(u+2v-6)=3(u-v)\ln\left(\frac{u-v}{3}\right)$
20. $3(v-2)=-2(u-1)\ln\left(\frac{1-u}{2}\right)$
21. $y-5x+8=2(y-x)\ln\left(\frac{y-x}{4}\right)$

البند ٤-٨

1. $y^2-3y-x+1=ce^{-x}$
2. $e^x+ye^{-y}=c$
3. $v^3-uv+v+1=cu$
4. $y^3-xy+y+1=cx$
5. $y=-\frac{x^2}{2}\cos 2x+\frac{x}{4}\sin 2x+cx$
6. $y^5+4x^2=cy$
7. $2(u-1)=(u+v-3)\ln|c(u+v-3)|$
8. $2x^2+2xy-3y^2-8x+24y=c$
9. $(u-v+4)^3=c(u-2v+5)^2$
10. $y^2\tan x=\ln|cy|$
11. $w^2=z^4(1+cz^2)$
12. $15x^4y^{12}=4y^{15}+c$
13. $y=2/(1+ce^{2x})$
14. $uv-u^2-u-4v+v^2/2=c$
15. $x^3(e^y+x)^2=c$
16. $y^2=x^2+cx^3$
17. $(u+v-8)^4=c(x-2y+1)$
18. $y(5+xy^4)=cx$
19. $2(y+1)=-(x+2y)\ln|c(x+2y)|$
20. $\left[(y-4)^2-3(x-3)^2\right]\left|\frac{\sqrt{3}(x-3)+(y-4)}{\sqrt{3}(x-3)-(y-4)}\right|^{1/\sqrt{3}}=c$
21. $y=(7x-x^3)/2$
22. $xv^2(5x-1)=1$
23. $x^2+x-3xy-y^2+4y=2$
24. $3(v+1)=(u+v)\ln|c(u+v)|$
25. $(x+y-5)^2(x-2y+1)=c$
26. $\ln|x+2y-1|=y-2x+c$
27. $u^3(2v-1)(5v-4)=1$
28. $y=(19x^4-1)^{1/2}/\sqrt{2}$
29. $x^2-2x-4y=3y^2$
30. $y(y-2x)=e^{-3x}$
31. $y+2\tan^{-1}\left(\frac{x-y+2}{2}\right)=c$

البند ٥-٣

1. $w = 2!\,3!\,\ldots\,(k-1)!$

2. $w = 48e^{7x}$

3. $\{0, -2, 3, 1\}$ مجموعة الثوابت

7. $y = -\frac{3}{4}e^{x} - \frac{1}{4}e^{-x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{-x}\sin 2x + x^2$

8. $y = -x^3 + x^2 + 2$

9. $v = 3u - u\ln u + u\left(\ln|u|\right)^2 + \ln|u|$

البند ٥-٦

1. $4D^2 - 7D - 2$
2. $6D^2 - 11D + 3$
3. $D^3 + 2D^2 - D - 2$
4. $2D^3 - 3D^2 + 1$
5. $D^3 - 4D^2 + 5D - 2$
6. $(D+2)(2D-1)$
7. $(2D+3)(D-4)$
8. $(D-1)(D+5)(D-4)$
9. $D^2(D+3)(D-3)$
10. $(D+2)(D-3)(D-1)$
11. $(D-2)(D+3)(D^2+4)$
12. $(D-1)^2(D-2)$
13. $(D-1)^2(D^2+2)$
14. $(D-4)(D^2+4D+5)$
15. $(D+2)^3(2D-1)$
16. $(D^2-7)(D+1)(D-1)$
17. $(D-3)(D^2+3D+9)$
18. $D^2 + 1 - x^2$
19. $D^2 - 1 - x^2$
20. xD^2
21. $xD^2 - D$
22. $x^2D^2 + 2xD - 2$
23. $x^2D^2 + 2xD - 2$

البند ٥-٧

1. $y = (c_1 + c_2x)e^{2x}$
2. $y = \left(c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3\right)e^{-3x}$
3. $y = \left(c_1 + c_2x + c_3x^2\right)e^{3x/2}$
4. $y = \left(c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4\right)e^{-2x}$
5. $y = \left(c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4 + c_6x^5\right)e^{-2x/3}$
6. $y = c_1e^{4x}$
7. $w = 1!\,2!\,3!\,\ldots(n-1)!\,e^{ax}$

البند ٦-٣

1. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$
2. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$
3. $y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-2x}$
4. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$
5. $y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-4x}$
6. $y = c_1 + c_2 e^{5x} + c_3 e^{3x}$
7. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x}$
8. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-3x}$
9. $y = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{3x/2} + c_3 e^{-2x}$
10. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-5x/2} + c_3 e^{x/3}$
11. $y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x}$
12. $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-5x/2} + c_3 e^{-3x/2}$
13. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x/2} + c_3 e^{3x/2} + c_4 e^{x}$
14. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-4x}$
15. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-x/2} + c_4 e^{-x/3}$
16. $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-x/2} + c_4 e^{-3x/2}$
17. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} + c_5 e^{3x}$
18. $y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx}$
19. $y = \dfrac{e^{3x} - e^{-2x}}{1 - e^{-5}}$
20. $y = e^{3x} + 3e^{-x}$
21. $y = \dfrac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x} - 2\right)$
22. $y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{-(1+\sqrt{2})x} - e^{(-1+\sqrt{2})x}\right)$
23. $y = 2e^{-2x} - e^{3x}$

البند ٦-٤

1. $y = (c_1 + c_2 x)e^{x}$
2. $y = (c_1 + c_2 x)e^{x/2}$
3. $y = c_1 + (c_2 + c_3 x)e^{3x}$
4. $y = c_1 + (c_2 + c_3 x)e^{-x/3}$
5. $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-x/2}$
6. $y = (c_1 + c_2 x)e^{x} + (c_3 + c_4 x)e^{-x}$
7. $y = c_1 e^{x} + (c_2 + c_3 x)e^{-2x}$
8. $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{x}$
9. $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{5x} + c_5 e^{-5x}$
10. $y = (c_1 + c_2 x)e^{x/2} + (c_3 + c_4 x)e^{-x}$
11. $y = (c_1 + c_2 x)e^{-3x/2} + (c_3 + c_4 x)e^{2x}$
12. $y = (c_1 + c_2 x)e^{x} + c_3 e^{-5x} + (c_4 + c_5 x)e^{-x}$

13. $y=(c_1+c_2x)e^{-x}+c_3e^{(1+\sqrt{3})x}+c_4e^{(1-\sqrt{3})x}$

14. $y=\frac{3}{4}(e^{-x}-e^{-5x})$ 15. $y=e^{2(x-1)}-e^{x-1}$

16. $y=(1+x)e^{-2x}$ 17. $y=(2-x)e^{-2x}$

18. $y=\frac{5}{36}\left(1-e^{-6x}+\frac{6}{5}xe^{-6x}\right)$ 19. $y=2-e^{-x}-e^{-2x}$

20. $y=2-2e^{x}+2xe^{x}-\frac{x^2}{2}e^{x}$ 21. $y(2)=4e$

22. $y(2)=3e^{-4}+6$

البند ٦–٥

1. $y=c_1e^{x}\cos 2x+c_2e^{x}\sin 2x$ 2. $y=c_1\cos x+c_2\sin x$

3. $y=e^{2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$ 4. $y=e^{3x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$

5. $y=e^{2x}(c_1\cos\sqrt{3}x+c_2\sin\sqrt{3}x)$

6. $y=e^{-x/3}[c_1\cos\frac{\sqrt{2}x}{3}+c_2\sin\frac{\sqrt{2}x}{3}]$

7. $y=e^{-2x}(c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x)$

8. $y=c_1e^{x}+e^{-x/2}\left[c_2\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+c_3\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right]$

9. $y=c_1e^{x}+e^{-x}(c_2\cos x+c_3\sin x)$

10. $y=c_1+c_2x+e^{-x/2}(c_3\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+c_4\sin\frac{\sqrt{3}x}{2})$

11. $y=c_1+c_2x+c_3e^{-x}\cos 3x+c_4e^{-x}\sin 3x$

12. $y=c_1+c_2e^{-2x}+c_3e^{2x}+c_4\cos 2x+c_5\sin 2x$

13. $y=c_1e^{-2x}+c_2\cos x+c_3\sin x+c_4xe^{-2x}+c_5e^{3x}$

14. $y=(c_1+c_2x)\cos 3x+(c_3+c_4x)\sin 3x$

15. $y=c_1\cos x+c_2\sin x+(c_3+c_4x)\cos 2x+(c_5+c_6x)\sin 2x$

16. $y=2\cos 4x-\frac{1}{2}\sin 4x$ 17. $y=2e^{-x}\cos x+3e^{-x}\sin x$

18. $y=e^{x}(\sin x-\cos x)$ 19. $y=e^{x}-\cos 2x$

20. $y=\frac{e^{-x}}{6}\left[\cos\sqrt{3}x-\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x\right]-\frac{e^{2x}}{6}$

البند ٦-٧

1. $y = c_1 + c_2 e^{2x}$
2. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$
3. $y = (c_1 + c_2 x) e^{-x/2}$
4. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$
5. $y = c_1 e^{(9+3\sqrt{5})x/2} + c_2 e^{(9-3\sqrt{5})x/2}$
6. $y = e^{-2x/3}\left(c_1 \cos \dfrac{\sqrt{23}}{3} x + c_2 \sin \dfrac{\sqrt{23}}{3} x\right)$
7. $y = c_1 e^{-x} + e^{x}(c_2 \cos \sqrt{2}\, x + c_3 \sin \sqrt{2}\, x)$
8. $y = c_1 e^{2x} + e^{-2x}(c_2 \cos 3x + c_4 \sin 3x)$
9. $y = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-3x}$
10. $y = c_1 e^{-x} + e^{2x}(c_2 + c_3 x)$
11. $y = e^{-x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2)$
12. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{5x/2} + c_3 e^{-x/2}$
13. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{(-1+\sqrt{7})x} + c_3 e^{-(1+\sqrt{7})x}$
14. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} \cos x + c_3 e^{x} \sin x$
15. $y = (c_1 + c_2 x) \cos \sqrt{2}\, x + (c_3 + c_4 x) \sin \sqrt{2}\, x$
16. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{x/2} + c_3 e^{-3x/2}$
17. $y = (c_1 + c_2 x) e^{x} + (c_3 + c_4 x) e^{-x} \cos 2x$
    $+ (c_5 + c_6 x) e^{-x} \sin 2x + c_7 e^{-3x}$
18. $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{x} + c_4 e^{2x} + e^{-x/2}(c_5 \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} x + c_6 \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} x)$
    $+ (c_7 + c_8 x + c_9 x^2) e^{-3x} + \cos x + (c_{10} + c_{11} x + c_{12} x^2) e^{-3x} \sin x$
19. $y = e^{x}(c_1 + c_2 x) c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$
20. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + e^{-x}(c_3 + c_4 x)$
21. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-x} + e^{-2x}(c_4 + c_5 x)$
22. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$
23. $y = c_1 e^{x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x$
24. $y = c_1 e^{-2x} + e^{-x/2}(c_2 \cos x + c_3 \sin x)$
25. $y = c_1 e^{-x} + e^{-3x}(c_2 \cos \dfrac{x}{2} + c_3 \sin \dfrac{x}{2})$
26. $y = e^{3x} + e^{-2x}$
27. $y = e^{-2x}(1 - x^2)$
28. $y = e^{-x} + e^{-4x} - e^{-2x}$
29. $y = e^{2x} - \sqrt{2}\, e^{x} \sin \sqrt{2}\, x$
30. $y = e^{5x} - x e^{5x}$
31. $y = k \sin 2x$ $\quad k$ ثابت

32. $y = 2 - 2e^x + 2xe^x - (1/2)\, x^2\, e^x$

33. $y = \left[1 + (9x/2)\right]e^{-5x/2}$

34. $y = (-1/5)\,(e^{3x} + 4e^{-2x})$

35. $y = e^{\pi(1-x)}\left[\left(\pi + \pi^{-1}\right)x + 1 - \pi - \pi^{-1}\right]$

36. $y = (1+x)\, e^x$

37. $y = (1/9)\left[e^{3x} + e^{-3x} + 7\right]$

البند ٧-٢

1. $(D^2 - D - 2)y = 0$
2. $(D^3 - 4D^2)y = 0$
3. $(D^4 + D^3)y = 0$
4. $(D^3 - 2D^2 + D - 2)y = 0$
5. $\left[(D+1)^2 + 9\right]^2 y = 0$
6. $(D^3 - D^2 + D + 39)y = 0$
7. $[(D-a)^2 + b^2]\, y = 0$
8. $(D^2 + 1)y = 0$
9. $D^3(D^2+1)^2 y = 0$
10. $(4D^3 + 4D^2 - D - 1)\, y = 0$
11. $m = 0, 0, -2$
12. $m = 0, 1, -1$
13. $m = 3, 3, 3, i, -i$
14. $m = 2 \pm 2i$
15. $m = 0, 0, 1/2, 1/2$
16. $m = 3, -3, -3$
17. $m = \pm 2i$
18. $m = \pm 2i$
19. $m = \pm 2i$
20. $m = 0, \pm 2i$
21. $m = 0, 0$
22. $m = \pm \frac{i}{2}, \pm \frac{i}{2}, \pm \frac{i}{2}$
23. $m = 0, \pm 2i$
24. $m = 2 \pm \sqrt{2}\, i$
25. $m = 0, 0, 0, 1, -1$
26. $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \pm i, \frac{1}{2} \pm i$

البند ٧-٣

1. $y = c_1 e^{-3x} + c_2\, e^{3x} - 6$
2. $y = c_1 + c_2\, e^{-x} + 3x$
3. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x\, e^{-2x} + \frac{x}{2} + 1$
4. $y = c_1 e^x + c_2\, e^{2x} + x^3$
5. $y = c_1 e^x + c_2\, e^{-x} + x^2 e^{-x} - 2\cos 2x$
6. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 11x - 1$
7. $y = c_1 e^x + c_2\, e^{2x} + \frac{e^x}{2}(\cos x - \sin x)$
8. $y = (c_1 + c_2\, x)e^{2x} + e^x$

9. $y = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x + \frac{1}{4} \sin x$

10. $y = e^{-x/2}\left[c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right] + \frac{e^x}{3} (2x - x^2 - \frac{4}{3})$

11. $y = e^{-3x}(c_1 + c_2 x) + \frac{1}{49} e^{4x} (\frac{2}{7} - x)$

12. $y = c_1 e^{-x} - 5 + e^x (c_2 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6})$

13. $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} - e^x$

14. $y = (c_1 + 3x)e^{-x} + c_2 e^{2x} + x - 1$ 15. $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \cos x$

16. $y = c_1 + 2x + e^x (c_2 + x) + e^{-x}/2$

17. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{2} \sin x$ 18. $y = c_1 e^{-x} + e^x (c_2 - 2x + 2x^2)$

19. $y = e^{-x/2} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + \sin x + 2\cos x - x \cos x$

20. $y = e^{-2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + 10 x - 8 + \frac{e^{3x}}{2}$

21. $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{6} \left(x^2 + \frac{5}{3} x + \frac{37}{18} - xe^x\right)$

22. $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - \frac{x^2}{2}$

23. $y = c_1 e^x + e^{-2x} \left(c_2 + c_3 x - \frac{x^2}{6}\right)$

24. $y = e^x (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \frac{x^3}{6}) + x - 13$

25. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + e^{-x} (c_3 - x) + x + 1/2$

26. $y = c_1 e^{2x} + e^{-3x} (c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x) - \frac{1}{26} \left(x + \frac{1}{26}\right)$

$+ \left(\frac{xe^{-3x}}{58}\right) \left(\frac{5}{2} \cos 2x - \sin 2x\right)$

27. $y = c_1 e^x + e^{-x} (c_2 - \frac{x}{4}) + c_3 \cos x + c_4 \sin x$

28. $y = c_1 + c_2 x + e^x \left(c_3 + c_4 x + \frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^2}{2}$

29. $y=\left(c_1+\frac{x}{8}\right)e^{x/2}+c_2e^{-x/2}+c_3\cos\frac{x}{2}+c_4\sin\frac{x}{2}$

30. $y=c_1e^x+(c_2+x)\cos x+(c_3-x)\sin x$

31. $y=2(e^{2x}-\cos x-2\sin x)$

32. $y=\frac{5}{8}\left(e^{8x}+e^{-8x}-\frac{2}{5}\right)$

33. $y=2e^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x+1)$

34. $y=(2x-\pi)\cos x-\frac{11}{3}\sin x-\frac{8}{3}\cos 2x$

35. $y=e^x-1$

36. $y=e^{-x}+\sin x-\cos x$

37. $y=\frac{1}{60}\left(e^{-4x}+5-6e^x-10e^{2x}+70e^{3x}\right)$

38. $y=\frac{3}{4}e^x+\frac{7}{12}e^{-x}-\frac{e^{2x}}{3}+\frac{\sin x}{2}$

39. $y=\left(1+e^{-2x}\right)\sin x+\left(e^{-2x}-1\right)\cos x$

40. $y=4e^{-x}+2xe^{-x}+\frac{e^{2x}}{2}-\frac{9}{2}$

البند ٧–٤

1. $y=4$
2. $y=-1$
3. $y=-5$
4. $y=3$
5. $y=-2x^2$
6. $y=5x/2$
7. $y=-8x$
8. $y=-6x^2$
9. $y=-3x^2/2$
10. $y=5x^5/24$
11. $y=(3/8)\cos x$
12. $y=2\sin x$
13. $y=2\cos\sqrt{2}\,x$
14. $y=2\sin\sqrt{3}\,x/3$
15. $y=-\cos 3x$
16. $y=2x+\frac{1}{4}-3e^x$
17. $y=6x+\frac{e^{2x}}{2}$
18. $y=\frac{e^{-2x}}{2}$
19. $y=e^x+1-x$
20. $y=3e^x$
21. $y=-\frac{1}{5}\sin 2x$
22. $y=\frac{3}{2}-x$
23. $y=2\cos 3x$
24. $y=\frac{1}{2}e^{-3x}$

25. $y = 4e^{-2x}$

26. $y = \frac{2}{3}e^{-2x}$

27. $y = -\frac{1}{3}e^{x}$

28. $y = -4\sin x$

29. $y = 4\cos x$

30. $y = 4 - 5x^2$

31. $y = \frac{3}{20}e^{2x}$

32. $y = -\frac{1}{4}\sin 2x$

33. $y = \frac{1}{2}\sin 2x$

34. $y = \frac{3}{20}e^{2x} - \frac{1}{4}\sin 2x$

35. $y = -\cos 2x$

البند ٨–٢

1. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + 1 - x$
2. $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + e^{x} - x$
3. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{2}(1 - x\sin 2x)$
4. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + \frac{1}{2}xe^{x}$
5. $y = c_1 \sin x + (c_2 - x)\cos x + \sin x \ln|\sin x|$
6. $y = c_1 \cos x + (c_2 + x)\sin x + \cos x \ln|\cos x|$
7. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2}\sec x$
8. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \sin x \ln|\csc x + \cot x|$
9. $y = e^{-x}\left(c_1 + c_2 x - \ln|1 - e^{-x}|\right)$
10. $y_2 = x e^{2x}$
11. $y_2 = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$
12. $y_2 = x^4 \ln|x|$
13. $y_2 = 1$
14. $y_2 = x^2 + x + 2$
15. $y_2 = x\cos(\ln|x|)$
16. $y_2 = x$
17. $y_2 = x\ln|x|$
18. $y_2 = x^3$
19. $y_2 = x^2$
20. $y_2 = 3x + 2$
21. $y_2 = \frac{1}{2}[\tan x \sec x + \ln|\sec x + \tan x|]$
22. $y_2 = e^{x}$, $y_p = \frac{5}{2}e^{3x}$
23. $y_2 = x$, $y_p = 1$

البند ٨-٣

1. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{4}e^x - 1$

2. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x \ \ln | \sec 2x + \tan 2x |$

3. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{e^{3x}}{4}$

4. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x \sin x - \cos x \ln | \sin x |$

5. $y = c_1e^x + c_2 \, xe^x + xe^x \ \ln \ |x|$

6. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} \sec x$

7. $y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x + \frac{x}{4} \sin 4x + \frac{1}{16} \cos 4x \ln | \cos 4x |$

8. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - 2 + \sin x \ln |\sec x + \tan x|$

9. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} [\cos 2x \ln | \csc 2x + \cot 2x | - 1]$

10. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \sin x \ln |\csc 2x + \cot \ 2x|$

11. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} - e^x \ \sin^{-1} e^{-x} - \sqrt{1 - e^{-2x}}$

12. $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} + \frac{1}{2}xe^x$

13. $y = c_1 + c_2e^x + c_3xe^x + 2x + \frac{x^2}{2}$

14. $y = c_1e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x + \frac{1}{16}e^{2x}$

15. $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \ln |\sec x| - \sin x \ \ln |\sec x + \tan x|$

16. $y = c_1x + c_2x^{-1} + c_3x^3 - 3 \cos x - (x - 3x^{-1}) \sin x$

17. $y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 - \frac{x}{24}$

البند ٨-٥

1. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} - xe^{-x} + \frac{1}{2}e^{-x} \ \ln (1 + e^{-2x})$

2. $y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x - \frac{1}{16} (\cos 4x) \ \ln | \sec 4x + \tan 4x |$

3. $y = c_1 e^{3x/2} + c_2 x e^{3x/2} + \frac{e^{3x}}{9} + \frac{e^{5x}}{49}$

4. $y = c_1 x + c_2 x^{-2} + 2x^{-2} \ln|x| + x \ln|x|$

5. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - (1 - e^{2x})^{1/2}$ 6. $y = c_1 e^{-x} + c_2 (x-1)$

7. $y = c_1 x + c_2 \left[\frac{x}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - 1 \right], x \neq 1$

8. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (1/2) \left[\tan x + \cos x \ \ln |\sec x + \tan x| \right]$

9. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 1 - x e^x + (e^x - e^{-x}) \ln (1 + e^x)$

10. $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x - \cos x \ln|\sec x + \tan x|$

11. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - e^{2x} \sin e^{-x}$

12. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (1/6) \sec x \tan x$

13. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} - e^{-3x} \left[e^x \sin e^x - \cos e^x \right]$

14. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (1/6) \cot x \csc x$

15. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \tan^{-1} e^{-x}$

16. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x e^{-x} + \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \ln \left| 1 - e^{-2x} \right|$

17. $y = c_1 e^x + c_2 (x+1) - x^2$

18. $y = c_1 (5x - 1) + c_2 e^{-5x} - \frac{x^2 e^{-5x}}{10}$

19. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{e^{3x}}{10} - \cos x \ \ln |\sec x + \tan x| - 1$

20. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{24} \sec^2 2x + \frac{1}{8} \sin 2x \ \ln |\sec 2x + \tan 2x| - \frac{1}{8}$

21. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x^2 + 3 + 3x \sin x + 3 \cos x \cdot \ln|\cos x|$

22. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{e^x}{5} - \frac{1}{2} \cos 2x \ \ln |\sec 2x + \tan 2x|$

23. $y = c_1 x + c_2 x^5 + c_3 x^{-1} - \frac{x^{-2}}{21}$

24. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^x \ln|\sec e^x|$

25. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - e^{2x} \cos e^{-x}$

26. $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + e^x \ln (1 + e^x)$

البند ٩-٢

1. $2i, -2i$
2. $0,1$
3. 0
4. $i, -i$
5. 0
6. none
7. $0, i, -i$
8. $2, -1/2$
9. $1, 2$
10. $-1+i, -1-i$
11. $6, -1$
12. $1, \dfrac{(-1 \pm \sqrt{3}\ i)}{2}$
13. $0, 3i, -3i$
14. 0
15. $1/3$

البند ٩-٥

1. $y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{3n}}{3^n n!} = a_0 e^{x^3/3} \quad , -\infty < x < \infty$

2. $y = a_0 + a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} \quad , -\infty < x < \infty$

3. $y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{a_0}{(1-x)} \quad , \quad |x| < 1$

4. $$y = a_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k-2)(3k-5)...4.1}{(3k)!} x^{3k} \right] + a_1 \left[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k-1)(3k-4)\ ...\ 2\ .\ 1}{(3k+1)!} \right], \quad x < 0$$

5. $$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad , -\infty < x < \infty$$

6. $$y = a_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k x^{2k}}{2^k k!} \right] + a_1 \left[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k x^{2k+1} + 1}{3.5.7..(2k+1)} \right] \quad , -\infty < x < \infty$$

7. $y = a_0\left(1 - 2x^2 + \frac{x^4}{3}\right) + a_1\left[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)\,(-1)\,.1.\,3\,...(2k-5)\,x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]$

8. $y = a_0 + a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad , \quad |x| < 1$

9. $y = a_0\,(1 + 4x^2) + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,2^{2n}}{4n^2 - 1} x^{2n+1} \quad , \quad |x| < 1/2$

10. $y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \; , |\,x\,| < 1$

11. $y = a_0\,(1 - 3x^2) + a_1\,\left(\frac{x - x^3}{3}\right) \quad , \quad -\infty < x < \infty$

12. $y = \frac{a_0}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,(k+1)\,(2k+1)\,(2k+3)\,x^{2k}$

$$+ \frac{a_1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,(k+1)\,(k+2)\,(2k+3)\,x^{2k+1}, \quad |x| < 1$$

13. $y = a_0\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3(-1)^k\,(k+1)}{2^{2k}(2k-1)\,(2k-3)} x^{2k}\right] + a_1\left(x + \frac{5x^3}{12}\right) \quad , \quad |x| < 2$

14. $y = a_0\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{5.9.13...(4k+1)}{(2k)!} x^{2k}\right]$

$$+ a_1\left[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\;7.11.15...(4k+3)}{(2k+1)!} x^{2k+1}\right], \quad -\infty < x < \infty$$

15. $y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\,x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+3)}{3} x^{2k+1} \; , |\,x\,| < 1$

16. $y = a_0\left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3.5.7...(2k+1)}{(18)^k\,(2k-1)\,k!} x^{2k}\right] + a_1 x \; , \quad -\infty < x < \infty$

17. $y = a_0(1 + x^2 + \frac{x^4}{12}) + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3(-1)^k}{2^{2k} k!(2k-3)(2k-1)(2k+1)} x^{2k+1}$

18. $y = a_0(1 + 2x^2) + a_1\left[x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1.\ 5.\ 9.\ 13...(4k-3)}{k!(4k^2-1)} x^{2k+1}\right] \quad , |x| < \frac{1}{2}$

19. $y = a_1 x + a_0\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{3.\ 7.\ 11...(4k-5)}{2^k(2k-1)\,k!} x^{2k}\right], |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

20. $y = a_0\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} 3(-1)^k \frac{(-1).\ 3.\ 7.\ 11...(4k-5)}{2^k k!\,(2k-3)(2k-1)} x^{2k}\right]$

$+ a_1(x + \frac{x^3}{3}), |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

21. $y = a_0\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-2)^{3k}}{3^k k! 2.5.\ 8...(3k-1)}\right]$

$+ a_1\left[(x-2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-2)^{3k+1}}{3^k k!\ 4.7...\ (3k+1)}\right], \quad -\infty < x < \infty$

22. $y = -2\left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right] + 6x = 8x - 2e^x \quad , -\infty < x < \infty$

23. $y = 4x^4 - 12x^2 + 3\ , -\infty < x < \infty$

البند ١٠-٢

1. $u = c_1 e^{2x} + c_2 e^{6x} \ , \ v = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{6x}$

2. $v = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} \ , y = -c_1 \frac{e^{2x}}{2} - 3c_2 e^{-3x}$

3. $u = c_1 e^x + c_2 x e^x \ , v = (c_1 - c_2) e^x + c_3 x e^x$

4. $y = c_1 e^{2t} \cos 2t + c_2 e^{2t} \sin 2t\ , z = -2c_1 e^{2t} \sin 2t + 2c_2 e^{2t} \cos 2t$

5. $v = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x + 1, \quad y = c_1 \sin x - c_2 \cos x + x - 1$

6. $w = c_1 e^x + 2c_2 e^{4x} \ , y = -3c_2 e^{4x} + c_3 e^{-2x}$

7. $x = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} - 4e^t + \frac{1}{4}$, $y = (c_1 - c_2)e^{2t} + c_2 t e^{2t} - 8e^t - \frac{1}{4}$

8. $v = \frac{c_1}{2} \sin x + \frac{c_2}{2} \cos x - 2c_3 \sin \sqrt{6}\, x - 2c_4 \cos \sqrt{6}\, x$

$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 \sin \sqrt{6}\, x + c_4 \cos \sqrt{6}\, x$

9. $x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 \sin 2t + c_4 \cos 2t + e^t/5,$

$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - c_3 \sin 2t - c_4 \cos 2t - e^t/5$

10. $y = x + 2 + c_1 e^{-x} \cos 2x + c_2 e^{-x} \sin 2x$,

$w = x + 6 + (c_2 - c_1)e^{-x} \cos 2x - (c_1 + c_2) e^{-x} \sin 2x$

11. $y = c_1 e^{-t} + 2t^2 - 5t + 5$, $x = -c_1 e^{-t} + c_2 + \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 5t$

12. $y = 3 \cos x + 3 \sin x + c_1 + c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x$

$v = \frac{c_1}{4} - \frac{1}{5}(c_2 - 3c_3) \cos 3x - \frac{1}{5}(3c_2 + c_3) \sin 3x$

13. $v = 1 + c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$

$y = -x + \frac{5}{2} c_2 \cos x - \frac{5}{2} c_1 \sin x + 2c_4 \cos 2x - 2c_3 \sin 2x$

14. $x = c_1 e^t + e^{-t/2}(c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t + c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t)$

$y = c_1 e^t - \frac{1}{2} e^{-t/2}(c_2 + \sqrt{3}\, c_3) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{2} e^{-t/2} (\sqrt{3}\, c_2 - c_3) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t$

$z = c_1 e^t + \frac{1}{2} e^{-t/2} (\sqrt{3}\, c_3 - c_2) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{1}{2} e^{-t/2} (\sqrt{3}\, c_2 + c_3) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t$

15. $u = 3c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{-x} + 3c_3 e^{x/2}$

$v = 4c_1 e^{2x} - 5c_2 e^{-x} + c_3 e^{x/2}$

$w = -4c_1 e^{2x} - 4c_2 e^{-x} - c_3 e^{x/2}$

16. $x = -6c_1 e^{-t} - 3c_2 e^{-2t} + 2c_3 e^{3t}$

$y = c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t}$

$z = 5c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t}$

17. $y = a_1 + a_2 e^x + 3a_3 e^{4x}$

$v = b_2 e^x - a_2 x e^x - 16 a_3 e^{4x}$

$w = -a_1 + (b_2 - a_2) e^x - a_2 x e^x - 7a_3 e^{4x}$

البند ١٠-٣

1. $y' = u \ , \ u' = -6u + 3y + e^x - 2$
2. $y' = u \ , \ u' = 3u - 5y + \sin x$
3. $y' = u \ , \ u' = -pu - qy + f(x)$
4. $y' = u \ , \ u' = v \ , v' = 6v - 4u - y + e^t - t$
5. $y' = u \ , \ u' = v \ , v' = -pv - qu - ry + f(x)$
6. $y' = u \ , \ u' = v \ , v' = w \ , w' = y$
7. $x' = u \ , \ y' = v \ , u' = -9x + 4y + u + e^t - 1 + 2t^2 - 6t \ ,$
   $v' = 2x - 2y + 3t - t^2$
8. $v' = 2w + 12e^{2x} - 6, \ w' = v - w - 8e^{2x} + 4$
9. $v' = 2w + e^{-x} - 1, \ w' = -2v + 5e^x + 3 - 3e^{-x}$
10. $y' = u \ , u' = v \ , v' = w \ , w' = 6y - 2u + 3w$
11. $x = c_1 e^{4t} \ , y = \frac{4}{3} c_1 e^{4t}$.
    $x = c_2 e^{-4t}, \ y = 4c_2 e^{-4t}$
12. $x = c_1 e^t \ , y = 2c_1 e^t$
    $x = 0 \ , y = c_2 e^{-2t}$
13. $x = c_1 e^{2t} \ , y = -\frac{2}{3} c_1 e^{2t}$
    $x = c_2 e^{-2t} \ , y = -2 c_2 2e^{-2t}$.
14. $x = c_1 \ , y = -c_1$
    $x = c_2 e^{2t} \ , y = -\frac{c_2}{3} e^{2t}$
15. $x = c_1 e^{2t} \ , \ y = \frac{2}{3} c_1 e^{2t}$
    $x = c_2 e^{6t} \ , y = \frac{2}{5} c_2 e^{6t}$
16. $x = c_1 e^t \ , y = -c_1 e^t \ , \ z = -2c_1 e^t$
    $x = c_2 e^{3t} \ , \ y = c_2 e^{3t} \ , \ z = 0$
    $x = c_3 e^{-2t} \ , \ y = -c_3 e^{-2t} \ , \ z = c_3 e^{-2t}$.

البند ١٢-٢

1. $\frac{1}{s-6} \ , \ s > 6$
2. $\frac{s}{s^2+4}, \ s > 0$
3. $\frac{2}{(s+1)^2+4} \ , \ s > -1$
5. $\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$
6. $\frac{1}{(s-4)^2} \ , \ s > 4$
7. $e^{-2s}\left(\frac{2s+1}{s^2}\right) \ , \ s > 0$.

8. $\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{-s}$, $s > 0$

9. $\frac{1-e^{6-3s}}{s-2} + \frac{e^{-3s}}{s}$, $s > 2$

10. $\frac{5}{s} - \frac{1}{s-2} + \frac{12}{s^3}$, $s > 2$

11. $\frac{2}{s^3} - \frac{3}{s^2} - \frac{6}{(s+1)^2+9}$, $s > 0$

12. $\frac{6}{(s-3)^2+36} - \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s-1}$, $s > 1$

13. $\frac{s+2}{(s+2)^2+3} - \frac{2}{(s+)^3}$, $s > -2$

14. $\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} - \frac{3}{s}$, $s > 0$

15. $\frac{8}{s^3} - \frac{15}{s^2+9}$, $s > 0$

16. $\frac{2}{s^2+16}$

17. $\frac{1}{s} + \frac{1}{s-4}$, $s > 4$

18. Piecewise continuous

19. Piecewise continuous

20. Neither

21. Continuous

22. Neither

23. Neither

25. دالّة أسية

26. دالّة أسية

27. دالّة غير أسية

28. دالّة أسية

29. دالّة غير أسية

البند ١٢-٣

1. $\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} - \frac{5}{s}$, $s > 0$

2. $\frac{6}{s^3} - \frac{1}{s-2}$, $s > 2$

3. $\frac{3}{s} - \frac{5}{s-2} + \frac{4}{s^2+1} - \frac{7s}{s^2+9}$, $s > 2$

4. $\frac{s+1}{(s+1)^2+9} + \frac{1}{s-6} - \frac{4}{s}$, $s > 6$

5. $\frac{6}{s^4} - \frac{2}{s^3} - \frac{3}{s^2}$, $s > 0$

6. $\frac{2}{(s+2)^2+4} - \frac{2}{(s-3)^3}$, $s > 3$

7. $\dfrac{5s+11}{(s+2)(s+3)}$, $s>-2$

8. $\dfrac{s^4+4s^2+24}{s^5}$, $s>0$

9. $\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}+\dfrac{1}{(s+1)^2}$, $s>-1$

10. $24\left(\dfrac{1}{s^5}-\dfrac{1}{s^4}+\dfrac{1}{2s^3}-\dfrac{1}{6s^2}+\dfrac{1}{24s}\right)$, $s>0$

11. $\dfrac{(s-2)^2-25}{\left[(s-2)^2+25\right]^2}$, $s>0$

12. $\dfrac{2s+10}{(s-4)(s+2)}$, $s>4$

13. $\dfrac{1}{2s}-\dfrac{s}{2(s^2+4)}$, $s>0$

14. $\dfrac{3s}{4(s^2+1)}+\dfrac{s}{4(s^2+9)}$

15. $\dfrac{6-2s}{s^2+4s+8}$

16. $\dfrac{s}{2(s^2+9)}-\dfrac{s}{2(s^2+49)}$

17. $\dfrac{2(s+1)}{(s^2+2s+2)}$

البند ١٢-٤

1. $y=e^{-t}\cos 3t$

2. $y=\sin 2t$

3. $y=e^{-2t}(3\cos 3t-2\sin 3t)$

4. $y=\dfrac{3}{16}t^2e^{-5t/2}$

5. $\dfrac{1}{3}e^{-t}\sin 3t$

6. $y=(1-2t)e^{-2t}$

7. $y=e^{-3t}(\cos 2t-\dfrac{3}{2}\sin 2t)$

8. $y=\dfrac{1}{2}e^{-t/4}\cos\dfrac{\sqrt{47}\,t}{4}-\dfrac{5e^{-t/4}}{2\sqrt{47}}\sin\dfrac{\sqrt{47}\,t}{4}$

9. $y=e^{2t}(2\cos 2t+\dfrac{1}{2}\sin 2t)$

10. $y=e^{-4t}(2t-\dfrac{5}{2}t^2)$

11. $y=e^{t}(t+t^2+\dfrac{t^3}{6})$

12. $y=e^{-3t}(3\cos 2t-4\sin 2t)$

13. $y=2e^{-2t}\cos 3t+4e^{-2t}\sin 3t$

14. $y=\dfrac{1}{6}t^2e^{t}(t+3)$

15. $y=\dfrac{1}{2}e^{2t}(4\cos 4t-3\sin 4t)$

16. $y=3e^{t}-2e^{-3t}$

17. $y=e^{-3t}(6e^{2t}+2t-1)$

18. $y=3e^{2t}-e^{-t}-2e^{3t}$

19. $y = \frac{9}{2} e^{t} - \frac{7}{2} e^{-3t}$

20. $y = 8e^{2t} - e^{-t}(\cos 2t - 3 \sin 2t)$

21. $y = \frac{1}{2} t^2 + \cos t - 1$

22. $y = e^{t} - e^{-2t} + 2$

23. $y = 3e^{2t} - 2t - 3$

24. $y = e^{t} + e^{-2t} + t - 2$

25. $y = \frac{(b \sin at - a \sin bt)}{ab\,(b^2 - a^2)}$

البند ١٢-٧

1. $y = \frac{1}{216}\left(35e^{-5t} + 181\, e^{t}\right) - \frac{1}{36}\, t\, e^{t}\,(1 - 3t)$

2. $y = \left(\frac{t^2}{2} + 6t + 4\right) e^{-t}$

3. $y = e^{t} + 1$

4. $y = 2e^{t} - 3$

5. $y = e^{2t} + 2t - 1$

6. $y = 2e^{3t} + \frac{1}{12} t^4 e^{3t}$

7. $y = 3t\, e^{t} - e^{-6t}$

8. $y = e^{x} + \cos 3x - 2 \sin 3x$

9. $y = t + \pi \cos t + \sin t$

10. $y = 2(e^{t} - \cos t - \sin t)$

11. $y = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t} \cos \sqrt{2}\, t - \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-2t} \sin \sqrt{2}\, t$

12. $y = 2t^2 - 6t - 8e^{-t} + e^{-2t} + 7$

13. $y = \cos t - \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t$

14. $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{t} \cos t + \frac{1}{2} e^{t} \sin t$

15. $y = e^{2t}(1 + t) - \frac{1}{2} \sin 2t$

16. $Y(s)=\dfrac{-s^2+s-1}{(s^2+1)\,(s-1)\,(s-2)}$

17. $Y(s)=\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{2}{s}-\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{1}{(s+1)^2}$

18. $Y(s)=\dfrac{-s^3-s^2+2}{s^3\,(s^2+6)}$

19. $Y(s)=\dfrac{s+1}{s(s+1)\,(s^2+4s+6)}$

20. $Y(s)=\dfrac{2s^3-17s^2+28\,s-12}{(s-1)^2(s-5)}$

21. $Y(s)=\dfrac{1}{s^2+16}+\dfrac{s}{(s^2+16)^2}$

22. $Y(s)=\dfrac{s^3+s^2+2s}{(s^2+1)(s-1)^2}$

23. $Y(s)=\dfrac{s}{s^2+\beta^2}+\dfrac{Aw}{(s^2+\beta^2)\,(s^2+w^2)}$

24. $Y(s)=\dfrac{s^3+2s^2+s+e^{-3s}\,(2s+1)}{s^2\,(s-1)\,(s+1)}$

25. $Y(s)=\dfrac{s^2-7s^2+24}{(s-1)\,(s-2)(s-4)}$

26. $y(t)=2e^t-\cos t-\sin t$

27. $y=2+e^t-3e^{-2t}+e^{-3t}$

ثبت المصطلحات العلمية



عربي / انجليزي

اختبار النسبة	ratio test
اختزال الرتبة	reduction of order
اختياري	arbitrary
استقلال خطي	linear independence
أسس مركبة	complex exponents
أصفار الدالة	zeros of a function
اعتماد	dependence
انفصال قفزي	jump discontintuity
اهتزاز متخامد	damped vibration
اهتزازات مخمدة	overdamped vibrations
أولي	elementary
بندول	pendulum
تحويل لابلاس	Laplace transform
تخمين	inspection
تطبيق	application
تعامدية	orthogonality
تغير الوسطاء	variation of parameters
تقارب	convergence
تكامل محدود	definite integral
ثابت	constant
جذر	root
جزئي	partial
حركة توافقية بسيطة	simple harmonic motion
حركة متخامدة تخامدا حرجا	critically damped

real	حقيقي
particular solution	حل خاص
series solution	حل المتسلسلات
linear	خطي
periodic function	دالة دورية
continuous function	دالة متصلة
piecewise continuous function	دالة متصلة قطعيا
complementary function	دالة مكملة
period	دورة
order	رتبة
resonance	رنين
Wronskian	رونسكيان
capacity	سعة المكثف
necessary and sufficient condition	شرط لازم وكافي
method	طريقة
ordinary	عادي
integrating factor	عامل مكاملة
recurrence relation	علاقة تكرارية
non linear	غير خطي
non homogeneous	غير متجانس
undamped	غير متخامدة
superposition principle	قاعدة التركيب
initial value	قيمة ابتدائية
minimum	قيمة صغرى
maximum	قيمة عظمى

damped force	قوة متخامدة
polynomial	كثيرة حدود
partial fractions	كسور جزئية
sequence	متتالية
power series	متسلسلة قوى
orthogonal trajectories	مسارات متعامدة
adjoint	مرافق
derivative	مشتقة
separable equation	معادلة ذات متغيرات منفصلة
differential equation	معادلة تفاضلية
homogeneous equation	معادلة متجانسة
auxilliary equation	معادلة مساعدة
coefficient	معامل
undetermined coefficient	معاملات غير معينة
condenser	مكثف
operator	مؤثر
differential operator	مؤثر تفاضلي
singular point	نقطة شاذة
ordinary point	نقطة عادية
mathematical model	نموذج رياضي
plane trigonometry	هندسة مستوية
uniqueness	وحدانية
parameter	وسيط

English / Arabic

English	Arabic
adjoint	مرافق
application	تطبيق
arbitrary	اختياري
auxilliary equation	معادلة مساعدة
capacity	سعة المكثف
coefficient	معامل
complementary function	دالة مكملة
complex exponents	أسس مركبة
condenser	مكثف
constant	ثابت
continuous function	دالة متصلة
convergence	تقارب
critically damped	حركة متخامدة تخامدا حرجا
damped force	قوة متخامدة
damped vibration	اهتزاز متخامد
definite integral	تكامل محدود
dependence	اعتماد
derivative	مشتقة
differential equation	معادلة تفاضلية
differential operator	مؤثر تفاضلي
elementary	أولي
homogeneous equation	معادلة متجانسة
initial value	قيمة ابتدائية

inspection	تخمين
integrating factor	عامل مكاملة
jump discontintuity	انفصال قفزي
Laplace transform	تحويل لابلاس
linear	خطي
linear independence	استقلال خطي
mathematical model	نموذج رياضي
maximum	قيمة عظمى
method	طريقة
minimum	قيمة صغرى
necessary and sufficient condition	شرط لازم وكافي
non homogeneous	غير متجانس
non linear	غير خطي
operator	مؤثر
order	رتبة
ordinary	عادي
orthogonality	تعامدية
orthogonal trajectories	مسارات متعامدة
ordinary point	نقطة عادية
overdamped vibrations	اهتزازات مخمدة
parameter	وسيط
partial	جزئي
partial fractions	كسور جزئية
particular solution	حل خاص
pendulum	بندول

period	دورة
periodic function	دالة دورية
piecewise continuous function	دالة متصلة قطعيا
plane trigonometry	هندسة مستوية
polynomial	كثيرة حدود
power series	متسلسلة قوى
ratio test	اختبار النسبة
real	حقيقي
recurrence relation	علاقة تكرارية
reduction of order	اختزال الرتبة
resonance	رنين
root	جذر
separable equation	معادلة ذات متغيرات منفصلة
sequence	متتالية
series solution	حل المتسلسلات
simple harmonic motion	حركة توافقية بسيطة
singular point	نقطة شاذة
superposition principle	قاعدة التركيب
undamped	غير متخامدة
undetermined coefficient	معاملات غير معينة
uniqueness	وحدانية
variation of parameters	تغير الوسطاء
Wronskian	رونسكيان
zeros of a function	أصفار الدالة


الكشاف



الدكتور سالم بن أحمد سحاب

المؤلف في سطور . .

- من مواليد ١٣٧٤هـ .
- حصل على بكالوريوس العلوم في الرياضيات من جامعة الملك فهد للبترول والمعادن عام ١٣٩٦هـ .
- ابتعث في شهر محرم ١٣٩٧هـ إلى الولايات المتحدة الأمريكية للحصول على درجتي الماجستير والدكتوراه في الرياضيات .
- حصل على ماجستير العلوم في الرياضيات من جامعة ولاية كلورادو الأمريكية عام ١٣٩٩هـ .
- حصل على دكتواره الفلسفة في الرياضيات من جامعة ولاية كلورادو الأمريكية عام ١٤٠١هـ .
- عُين أستاذًا مساعدًا بقسم الرياضيات بجامعة الملك عبد العزيز في شهر شعبان من عام ١٤٠١هـ .
- رُقي إلى مرتبة أستاذ مشارك في شهر جمادي الأولى من عام ١٤٠٨هـ .
- رُقي إلى مرتبة أستاذ في أوائل عام ١٤١٣هـ .
- له عشرون بحثًا منشورًا ، وكتابان آخران .
- له مساهمات صحفية وإذاعية .

هذا الكتاب . .

تُعد المعادلات التفاضلية العادية من المواد الأساسية التي يرتكز عليها نمو الطالب العلمي في المجالات الرياضية والتطبيقية والهندسية . فهي تربط بين تجريد النظريات وواقع التطبيقات بأسلوب علمي سلِس . .

وقد رُوعي في مادة هذا الكتاب خدمتها لقاعدة عريضة من الطلبة ، ولذا فقد أوثر الابتعاد عن غلو التنظير والاكتفاء بالإشارة إلى التجريد الرياضي بالقدر القليل المناسب ، سواء كان ذلك نصًا أو برهانًا .

ويغطي هذا الكتاب المادة العلمية المطلوبة لمنهج يعادل ثلاث ساعات فصلية وربما يزيد قليلاً . أما المحتوي فربما كان قياسيًا لكثير من جامعات العالم ، وهو خاضع لمفردات المنهج التي أقرها قسم الرياضيات في جامعة الملك عبد العزيز بجدة .